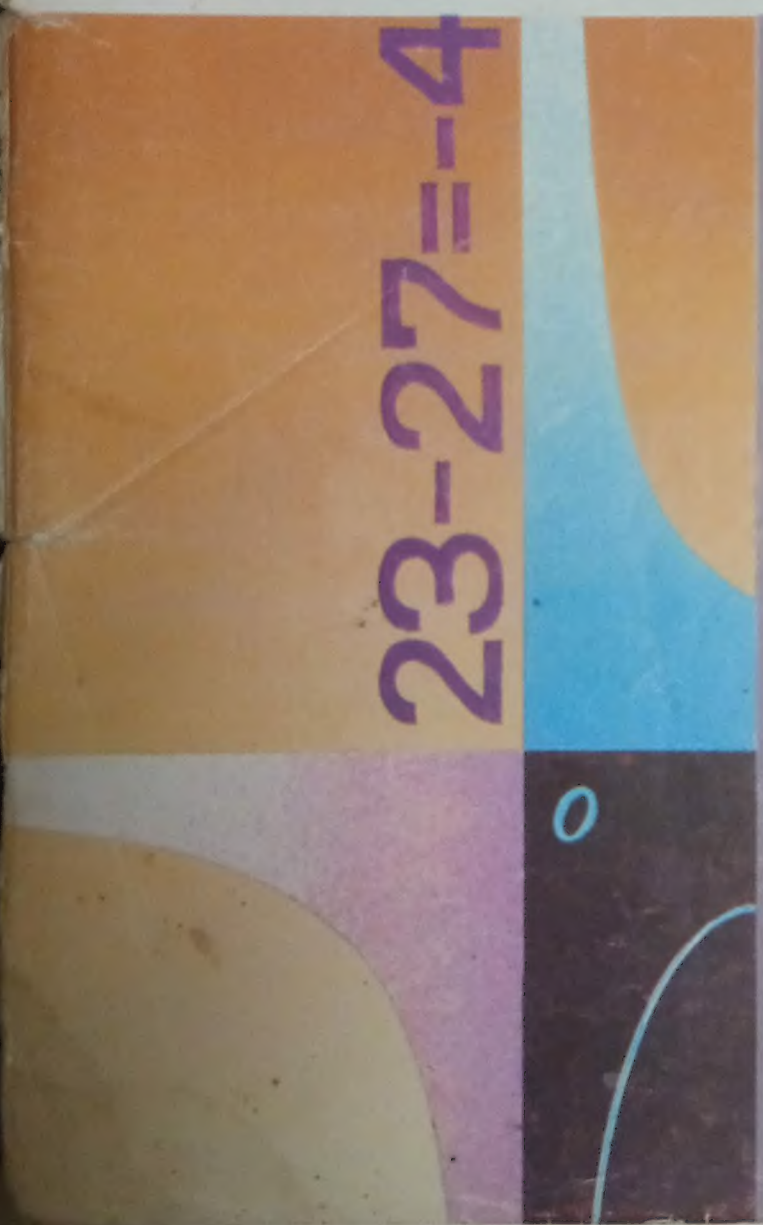
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Đại số 7

HOÀNG XUÂN SÍNH – NGUYỄN TIẾN TÀI



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HOÀNG XUÂN SÍNH – NGUYỄN TIẾN TÀI

Đại số 7

(Sách chỉnh lí)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC – 1994

Biên soạn và chỉnh lí :

HOÀNG XUÂN SÍNH
NGUYỄN TIẾN TÀI

Biên tập :

NGUYỄN KIM THƯ

Biên tập kĩ thuật :

TRẦN THU NGA

Sửa bản in :

HOÀNG DIỄM

Đại số 7/ Hoàng Xuân Sính, Nguyễn Tiến Tài. – H. : Giáo dục, 1994.– 119 tr ; 20,5cm

Mã số : 2H718M4

512(075)

Chương I

SỐ NGUYÊN

§1. TẬP HỢP Z CÁC SỐ NGUYÊN

1. Đặt vấn đề

Chúng ta đã biết cộng và nhân hai số tự nhiên 3 + 5 = 8, 7.4 = 28. Tổng và tích của hai số tự nhiên lại là một số tự nhiên.

Còn phép trừ ? 5 - 3 = 2, nhưng 3 - 5 = ? Ta thấy phép trừ các số tự nhiên không phải luôn luôn thực hiện được.

Ta đặt vấn đề : Bổ sung vào tập hợp **N** các số tự nhiên những số mới để được tập hợp số trong đó phép trừ luôn luôn thực hiện được.

2. Tập hợp Z các số nguyên

Ta bổ sung vào **N** những số mới, kí hiệu là −1, −2, −3... đọc là trừ một, trừ hai, trừ ba,...

Tập hợp :

$$\mathbf{Z} = \{... - 3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$$

gồm các số tự nhiên và các số mới −1, −2, −3, ... gọi là *tập hợp các số nguyên*.

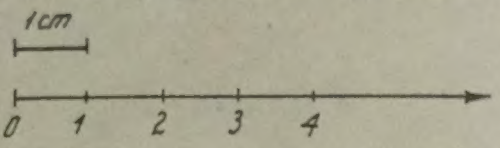
Chú ý : Đôi khi ta còn viết :

$$\mathbf{Z} = \{...-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 ; ...\}$$

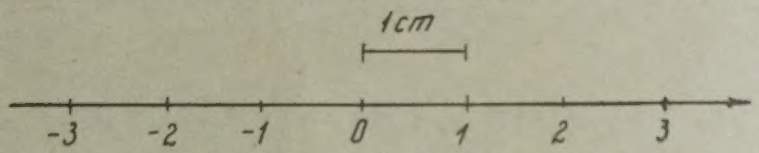
nghĩa là thêm dấu "+" trước các số tự nhiên khác 0, nhưng thường dấu "+" được bỏ đi.

3. Trục số

Các số tự nhiên được biểu diễn trên tia số



Để biểu diễn các số nguyên ta kéo dài tia số về bên trái điểm 0 và ghi các số −1, −2, −3... như hình vẽ :



Ta được một *trục số*. Điểm biểu diễn số nguyên a gọi là *điểm a.*

4. Số đối

Trên trục số ta thấy các điểm 1 và −1, 2 và −2, 3 và −3,... nằm ở hai phía của điểm 0 và cách đều điểm 0. Vì thế ta nói các số 1 và −1, 2 và −2, 3 và −3,... là các số *đối nhau.*

Ta còn nói : 1 là *số đối* của −1, 2 là số đối của −2, 3 là số đối của −3,.... Cũng vậy : −1 là số đối của 1, −2 là số đối của 2, −3 là số đối của 3,...

Chú ý : Hai số đối nhau chỉ khác nhau về dấu.

Số đối của số 0 được coi là chính nó.

BÀI TẬP

1. Đọc những điều ghi sau đây và xem điều đó có đúng không : $7 \in \mathbf{N}$, $-15 \in \mathbf{Z}$, $3 \in \mathbf{Z}$, $-5 \in \mathbf{N}$.

2. Để đo mức độ cận thị và viễn thị của mắt, người ta dùng cùng một đơn vị quang học là đi-ốp, nhưng với dấu "+" đằng trước nếu là viễn thị và dấu "−" nếu là cận thị. Hãy cho biết trong những người sau ai bị cận thị, ai bị viễn thị :

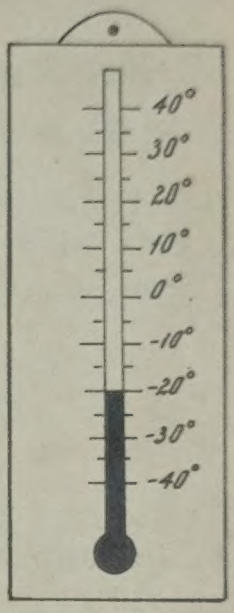
Bác Nam đeo kính số +3 đi-ốp.

Anh Sơn đeo kính số -5 đi-ốp.

Anh Lộc đeo kính số -2 đi-ốp.

Cụ Mão đeo kính số +4 đi-ốp.

3. Ở xứ lạnh nhiệt độ mùa đông thường xuống dưới 0°C. Để chỉ nhiệt độ dưới 0°C người ta thường dùng các số -1°C, -2°C, -3°C,...



a) Hãy đọc nhiệt độ ghi trong nhiệt kế ở hình bên.

b) Cho biết nhiệt độ ngày 15 tháng 12 ở một số nơi là : Hà Nội : 13°C, thành phố Hồ Chí Minh : 18°C, Matxcơva : -20°C, Xanh Pêterbua : - 25°C. Hãy cho biết trong các nơi sau nhiệt độ ở đâu cao hơn :

a) Hà Nội và Thành phố Hồ Chí Minh;

b) Hà Nội và Matxcơva ;

c) Matxcơva và Xanh - Peterbua.

4. Để đo độ cao thấp ở các địa điểm khác nhau trên trái đất, người ta lấy mực nước biển làm chuẩn. Độ cao hơn mực nước biển có số đo 1m, 2m, 3m,... Độ cao dưới mực nước biển có số đo -1m, - 2m, -3m... Hãy so sánh độ cao của các nơi sau đây :

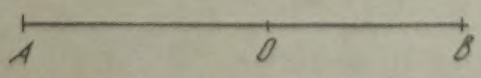
a) Núi PhanXiPan : +3142m ;

b) Cao nguyên Đaklak : + 600m ;

c) Thềm lục địa Việt Nam (tính trung bình) - 65m ;

d) Vực Philípin : - 10749m.

5. Hai canô cùng xuất phát từ O đi đến A hoặc B.



Ta quy ước viết vận tốc của ca nô đi đến B với dấu "+" đằng trước, còn vận tốc của ca nô đi đến A với dấu "–" đằng trước. Hỏi sau 1 giờ hai ca nô cách nhau bao nhiêu kilômét nếu vận tốc của chúng tương ứng là :

a) +14km/h và +12km/h.

b) +14km/h và −12km/h.

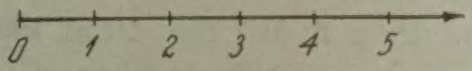
c) −14km/h và −12 km/h.

6. Tìm số đối của các số nguyên sau : 3 , −5, 7, −2. Hãy biểu diễn các số trên và số đối của chúng trên cùng một trục số.

§2. THỨ TỰ TRONG Z

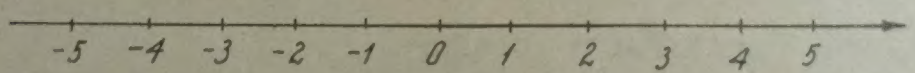
1. So sánh hai số nguyên

Thứ tự giữa các số tự nhiên được thể hiện rõ trên tia số:



Ta có : $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < ....$

Cũng vậy ta xác định thứ tự giữa các số nguyên trên trục số:



$... -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < ....$

Nghĩa là : *Số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b, viết a < b, nếu trên trục số điểm a ở bên trái điểm b.*

Ví dụ : So sánh 1 và 5 ; − 4 và 1 ; −5 và −3.

Ta thấy : $1 < 5$, $-4 < 1$, $-5 < -3$.

Chú ý : Ta có $3 < 5$ nhưng $-5 < -3$.

2. Số nguyên dương, âm

Số nguyên lớn hơn 0 gọi là số nguyên dương.

Số nguyên nhỏ hơn 0 gọi là số nguyên âm .

Như vậy : Các số tự nhiên 1, 2, 3,... là các số nguyên dương.

Các số −1, −2, −3,... là các số nguyên âm.

Số 0 không là số nguyên dương, cũng không là số nguyên âm.

3. Giá trị tuyệt đối của một số nguyên

Giá trị tuyệt đối của một số tự nhiên là chính nó.

Giá trị tuyệt đối của một số nguyên âm là số đối của nó.

Giá trị tuyệt đối của số nguyên a kí hiệu là $|a|$.

Ví dụ : $|15| = 15$, $|-32| = 32$, $|0| = 0$.

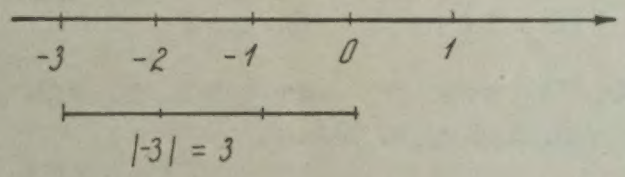
Nhận xét :

Hai số nguyên đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau:

$|-1| = |1| = 1$, $|-2| = |2| = 2$, $|-3| = |3| = 3$,...

4. Ý nghĩa hình học

Giá trị tuyệt đối của số nguyên a là số đo (theo đơn vị dài được dùng để lập trục số) của khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc O trên trục số.



BÀI TẬP

1. So sánh các số nguyên sau : 15 và 21 ; −7 và 2 ; 5 và −1 ; −1 và −4 ; −35 và 35.

2. Xếp các số nguyên sau theo thứ tự tăng dần :

15, −3, 0, −7, 9, 14, −16.

Xếp các số nguyên sau theo thứ tự giảm dần :

2, −2, 3, −6, 8, 0, −15.

3. Lấy hai số nguyên âm a, b (chẳng hạn a = −5, b = −7).

a) So sánh a và b ;

b) Tính |a|, |b| và so sánh hai số này.

Có thể rút ra kết luận gì về thứ tự giữa hai số nguyên âm và thứ tự giữa hai giá trị tuyệt đối của chúng ?

4. Tìm $x \in \mathbf{Z}$ thỏa mãn :

a) $-3 < x < 0$; b) $-5 < x < 5$.

5. a) Tính |−3|, |5|, |−25|, |0| ;

b) Tìm $a \in \mathbf{Z}$ biết : $|a| = 2$; $|a| = 0$; $|a| = 1$.

6. Nói tập hợp **Z** bao gồm hai bộ phận là các số nguyên dương và các số nguyên âm có đúng không ? Tại sao ?

LUYỆN TẬP

1. Điền dấu "<" hoặc ">" vào ô trống :

17 ☐ 15 ; 3 ☐ −27 ; −15 ☐ 1 ; −23 ☐ −11.

2. Điền dấu "+" hoặc "−" vào trước số nguyên ở trong ô vuông sao cho dấu "<" thỏa mãn :

$\boxed{17} < \boxed{3}$; $\boxed{4} < 0$; $\boxed{6} < \boxed{12}$; $0 < \boxed{25}$

(Trong mỗi trường hợp cần xét tất cả các khả năng điền dấu có thể được).

3. Tìm các số nguyên a biết :

a) $|a| = 9$; $|a| = 7$ và $a > 0$; $|a| = 3$ và $a < 0$.

Trong mỗi trường hợp hãy biểu diễn a và |a| trên trục số

b) $|a| < 2$.

4. Có thể kết luận gì về số nguyên a nếu biết :

a) $a = |a|$;

b) $a < |a|$.

5. Số nguyên b gọi là *số liền sau* của số nguyên a nếu $a < b$ và không có số nguyên c nào thỏa mãn $a < c < b$ (khi đó ta cũng nói a là *số liền trước* của b).

a) Tìm số liền sau của các số nguyên sau : 4 ; −7 ; 0 ; −1.

b) Tìm số liền trước của các số nguyên sau : −5 ; 3 ; 0 ; −17.

c) Tìm số nguyên a biết số liền sau a là một số dương và số liền trước a là một số âm.

§3. PHÉP CỘNG TRONG Z

Một số nguyên khác 0 bao giờ cũng mang một dấu nhất định : các số nguyên dương mang dấu "+" (mà ta thường không viết theo quy ước), các số nguyên âm mang dấu "−". Ta xác định phép cộng trong **Z** theo ba trường hợp.

1. Cộng với số 0

Ta quy định :

$$a + 0 = 0 + a = a$$ với mọi số nguyên a.

2. Cộng hai số cùng dấu

Quy tắc :

Để cộng hai số nguyên cùng dấu ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt trước kết quả nhận được dấu chung của chúng (dấu "+" có thể bỏ theo quy ước)

Ví dụ : $15 + 12 = 27$ (vì $|15| = 15$, $|12| = 12$ và dấu chung là dấu "+")

$(-15) + (-12) = -(|-15| + |-12|) = -(15 + 12) = -27.$

Nhận xét : Qua hai quy tắc trên ta thấy, nếu hai số nguyên là hai số tự nhiên thì phép cộng này cho cùng kết quả như phép cộng hai số tự nhiên đã biết.

3. Cộng hai số khác dấu

Có hai trường hợp :

1) Cộng hai số đối nhau : ta quy định tổng của hai số đối nhau luôn luôn bằng 0 :

$$0 + 0 = (-1) + 1 = (-2) + 2 = (-3) + 3 = \ldots = 0.$$

2) Cộng hai số khác dấu không đối nhau :

Quy tắc :

> *Để cộng hai số nguyên khác dấu không đối nhau ta tìm hiệu hai giá trị tuyệt đối của chúng (số lớn trừ số nhỏ) và đặt trước kết quả nhận được dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn (dấu "+" có thể bỏ theo quy ước)*

Ví dụ 1 : số nguyên dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn :

$$5 + (-3) = |5| - |-3| = 5 - 3 = 2.$$

$$(-3) + 5 = |5| - |-3| = 5 - 3 = 2.$$

Ví dụ 2 : Số nguyên âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn :

$$(-5) + 3 = -(|-5| - |3|) = -(5 - 3) = -2.$$

$$3 + (-5) = -(|-5| - |3|) = -(5 - 3) = -2.$$

BÀI TẬP

1. Tính : $9 + 4$; $-9 + (-4)$; $9 + (-4)$; $-9 + 4$.

$16 + (-16)$; $-13 + (-18)$; $-25 + 0$.

2. Điền số nguyên thích hợp vào ô trống :

a	−10	−12	21		−27		19
b	8	−6		−16		11	
a + b			−3	2	−5	−6	4

3. Nhiệt độ hiện tại của phòng ướp lạnh là -15^oC. Cho biết nhiệt độ sắp tới tại đó là bao nhiêu nếu có sự biến đổi nhiệt độ như sau :

a) giảm 5^oC ; b) tăng 7^oC ;

c) tăng 15^oC ; d) tăng 17^oC.

Nếu quy ước viết là : có sự biến đổi nhiệt độ như sau :

a) -5^oC ; b) $+7^oC$; c) $+15^oC$; d) $+17^oC$,

dấu "+" hay "−" tương ứng chỉ sự tăng hay giảm nhiệt độ, hãy làm phép tính cộng trong từng trường hợp đã cho để tìm lại kết quả.

4. Điền số thích hợp vào ô trống :

$17 + \square = -17$ $\quad -25 + \square = 10$

$-35 + \square = -50$ $\quad \square + 105 = 0.$

5. Cho a là một số nguyên dương, b là một số nguyên âm. Hãy so sánh $|a|$ và $|b|$ trong các trường hợp :

a) a + b là một số nguyên dương ;

b) a + b là một số nguyên âm.

Cho ví dụ để kiểm tra kết luận vừa rút ra.

§4. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG

Phép cộng các số nguyên có các tính chất sau :

1. Tính chất giao hoán

Với mọi a, b $\in$ **Z** ta có : $\boxed{a + b = b + a}$

Tính và so sánh : $-67 + 52$ và $52 + (-67)$.

2. Tính chất kết hợp

Với mọi a, b, c $\in$ **Z** ta có :

$$\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c.}$$

Tính và so sánh : $-13 + (-5 + 21)$ và $[-13 + (-5)] + 21$.

3. Cộng với số 0

Với mọi a $\in$ **Z** ta có : $\boxed{a + 0 = a}$

(theo định nghĩa).

4. Tính chất giao hoán và kết hợp tổng quát

Để cộng nhiều số nguyên, ta cộng dần từng hai số một. Nhưng có thể thực hiện điều đó bằng nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, để cộng ba số 5, −3, 7 ta có thể làm như sau :

$$[5 + (-3)] + 7 = 2 + 7 = 9$$

$$5 + (-3 + 7) = 5 + 4 = 9$$

$$(5 + 7) + (-3) = 12 + (-3) = 9.$$

Tất cả các cách đều cho cùng một kết quả do tính chất kết hợp và giao hoán của phép cộng. *Kết quả đó gọi là tổng của ba số 5, −3, 7.*

Tổng quát, tổng của ba số a, b, c là :

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b = ...$$

Cũng vậy, ta có thể nói về tổng của bốn, năm,... số nguyên. *Khi thực hiện phép cộng nhiều số ta có thể :*

a) Thay đổi tùy ý thứ tự các số hạng ;

b) Nhóm các số hạng một cách tùy ý bằng các dấu ( ) ; [ ] ; { }.

Ví dụ :

- $-649 + (-35) + 644 + 41 = (-649 + 644) + (-35 + 41)$

$$= -5 + 6 = 1.$$

• $732 + 80 + (-742) + (-1970) =$

$= \{[732 + (-742)] + 80\} + (-1970) =$

$= (-10 + 80) + (-1970) = 70 + (-1970) = -1900.$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $1 + (-3) + 5 + (-7) + 9 + (-11)$;

b) $-2 + 4 + (-6) + 8 + (-10) + 12$.

2. Tính nhanh:

a) $100 + 520 + 1993 + (-620)$;

b) $143 + 375 + (-43) + (-100)$.

3. Tính :

$1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + ... + (-40)$.

4. Tính tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn :

a) $-5 < x < 5$;

b) $-1000 < x < 1000$.

5. Viết ra 6 cách khác nhau để tính tổng của 4 số nguyên a, b, c, d.

Cho a = 107, b = 630, c = 1789, d = - 730. Cần thực hiện cách nào để tính tổng a + b + c + d nhanh nhất ?

§5. PHÉP TRỪ TRONG Z

1. Số đối

Theo định nghĩa của phép cộng tổng của hai số đối nhau luôn bằng 0 và ngược lại nếu tổng hai số bằng 0 thì chúng là hai số đối nhau.

Kí hiệu số đối của số nguyên a là $-a$. Ta có :

1) $\boxed{a + (-a) = (-a) + a = 0}$

2) $\boxed{\text{Nếu } a + b = 0 \text{ thì } b = -a}$

Chú ý : 1) Số đối của a là $-a$, nhưng khi đó a cũng là số đối của $-a$. Vậy :

$$\boxed{-(-a) = a}$$

2) Nếu a là số nguyên dương, chẳng hạn $a = 3$, thì số đối $-a$ trong trường hợp này chính là số nguyên âm -3. Như vậy, dấu "$-$" trong kí hiệu số đối và dấu "$-$" trong kí hiệu số nguyên âm phù hợp với nhau.

Số đối của 0 vẫn là 0 nên ta có $-0 = 0$.

Nếu a là số nguyên âm, chẳng hạn $a = -3$ thì $-a = -(-3) = 3$ là một số nguyên dương. Vì vậy khi viết $-a$ ta không nên hiểu lầm rằng đó luôn luôn là số nguyên âm.

3) Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối (§2) và cách kí hiệu số đối ta có :

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geqslant 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}}$$

2. Phép trừ

Hiệu của hai số nguyên a và b là tổng của a và số đối của b. Hiệu của a và b kí hiệu là $a - b$ và đọc là a trừ b.

Vậy $\boxed{a - b = a + (-b)}$

Nhận xét : Ta có $[a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a$. Vậy có thể nói hiệu $a - b$ là số cộng với b thì được a, hay phép trừ là phép toán ngược của phép cộng.

Ví dụ : $5 - 3 = 5 + (-3) = 2$

$3 - 5 = 3 + (-5) = -2$

$7 - (-4) = 7 + 4 = 11.$

Chú ý : Vì mọi số nguyên b đều có số đối $-b$, nên phép trừ $a - b$ bao giờ cũng thực hiện được. Như vậy, yêu cầu đặt ra

ở đầu chương được thỏa mãn : Trong tập hợp các số nguyên **Z** phép trừ luôn luôn thực hiện được :

BÀI TẬP

1. Điền số thích hợp vào ô trống :

a	15		-21			35		-47
-a		7		-81	0		27	

2. Tính : -(-3), -(-(-15)).

3. Điền số thích hợp vào ô trống :

a	9	-16	0	-72				
|a|					5	15	0	1

4. Có thể kết luận gì về số nguyên a nếu biết :

a) $a + |a| = 2a$; $(2a = a + a)$.

b) $a + |a| = 0$.

5. Tính hiệú : 17 - 25 ; -31 - 12 ; -15 - (-3) ; 32 - (-13).

6. Điền số thích hợp vào ô trống :

a	-6	-12	1	0	4	7		
b	7	-5	25	11	-22		8	-2
a-b						-5	-4	0

LUYỆN TẬP

1. Tính nhanh:

a) $125 + \{- 17 + [20 + (- 125)]\}$;

b) $(1031 + 743) + \{57 + (-1031)\}$.

2. Tìm x biết :

a) $3 + x = -2$;
b) $-7 + x = 3$;
c) $-15 + x = 0$;
d) $x + 4 = 1$.

3. Tính :

a) $-75 + (103 - 47)$;
b) $[32 - (-15)] - 23$;
c) $(-12 + 31) - 16$;
d) $-13 - (42 - 17)$.

4. Cho $a, b \in \mathbf{Z}$ và $|a| = |b|$. Hãy xét mối quan hệ giữa a và b.

5. Cho biết b là số liền sau của số nguyên a.

Hãy xét mối quan hệ giữa $-a$ và $-b$.

§6. QUY TẮC " DẤU NGOẶC"

1. Số đối của một tổng

Tính :

$(a + b) + (-a - b) = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0 + 0 = 0.$

Điều này chứng tỏ $-a - b$ là số đối của $a + b$, hay :

$$-(a + b) = -a - b$$

Nói cách khác : *số đối của một tổng bằng tổng các số đối.*

2. Quy tắc

Công thức trên còn được mở rộng, chẳng hạn :

$$-(a - b) = -a + b.$$
$$-(a + b - c) = -a - b + c.$$

Ta có *quy tắc :*

Khi bỏ dấu ngoặc mà đằng trước có dấu "−" ta phải đổi dấu các số hạng : dấu "+" thành dấu "−" và dấu "−" thành dấu "+", còn nếu đằng trước dấu ngoặc có dấu "+" thì dấu các số hạng không thay đổi.

Ví dụ :

$a - (b + c) = a - b - c$; $a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$.

3. Tổng đại số

Vì phép trừ theo định nghĩa cũng là phép cộng (với số đối của số trừ) nên một dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên được gọi là một *tổng đại số.*

Nhờ tính chất giao hoán, kết hợp và quy tắc "dấu ngoặc" ta có các kết luận sau :

Trong một tổng đại số ta có thể :

a) Thay đổi tùy ý vị trí các số hạng kèm theo dấu của chúng

Ví dụ : $a - b - c = - b + a - c = - b - c + a$.

b) Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý nhưng chú ý rằng nếu trước dấu ngoặc là dấu "–" thì phải đổi dấu các số hạng trong ngoặc.

Ví dụ : $a - b - c = (a - b) - c = a - (b + c)$

$- b - c + a = - (b + c) + a = - b - (c - a)$.

BÀI TẬP

1. Tính (sau khi bỏ dấu ngoặc):

a) $- 1537 + (1537 - 25)$;

b) $3751 - (125 + 3751)$;

c) $- 1935 - (32 - 1935)$.

2. Thay đổi vị trí số hạng và đặt dấu ngoặc thích hợp để tính các tổng đại số sau :

a) $- 1527 + 43 + 1520 - 61$;

b) $435 - 78 - 430 + 72$.

3. Đơn giản biểu thức sau khi bỏ dấu ngoặc:

a) $(a + b) + (b - a - c)$;

b) $(-a + c - d) - (c - a + d)$;

c) $-(b+d)+(-a+b+d)$.

4. Chứng minh đẳng thức sau :

a) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

b) $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$;

5. Tìm x biết :

a) $4-(15-x)=17$;

b) $-32-(x-14)=0$;

c) $-12+(-9+x)=0$,

d) $21+(25-x)=2$.

§7. PHÉP NHÂN TRONG Z

Phép nhân các số nguyên được xác định theo hai trường hợp

1. Nhân một số với số 0

Ta quy định :

$$\boxed{a.0 = 0.a = 0}$$ với mọi số nguyên a.

2. Nhân hai số nguyên khác 0

Quy tắc :

Tích của hai số nguyên khác 0 ; a và b là tích của $|a|$ và $|b|$ với dấu "+" (mà ta có thể bỏ theo quy ước) đằng trước nếu a và b cùng dấu, và dấu "−" đằng trước nếu a và b khác dấu.

$$\boxed{a.b = \begin{cases} |a| \,.\, |b| & \text{nếu a và b cùng dấu} \\ -(|a| \,.\, |b|) & \text{nếu a và b khác dấu} \end{cases}}$$

Ví dụ : $(-2) \,.\, 3 = -\,|-2| \,.\, |3| = -6$

$2 \,.\, (-3) = -\,|2| \,.\, |-3| = -6$

$(-5) \,.\, (-7) = +\,|-5| \,.\, |-7| = 35.$

3. Nhận xét

1) Để nhân hai số nguyên khác không a và b ta chỉ việc nhân hai số tự nhiên $|a|$, $|b|$ và đặt dấu theo quy tắc sau :

+	.	+	=	+
−	.	−	=	+
−	.	+	=	−
+	.	−	=	−

Vậy :

Tích của hai số nguyên dương hay tích hai số nguyên âm là một số nguyên dương.

Tích của một số nguyên dương và một số nguyên âm là một số nguyên âm.

2) Tích của một số nguyên với 0 bao giờ cũng bằng 0. Ngược lại, nếu a.b = 0 thì hoặc a = 0 hoặc b = 0.

3) Mỗi khi đổi dấu của một thừa số trong tích ab thì tích đổi dấu :

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab.$$

4) Nếu đổi dấu đồng thời cả hai thừa số thì tích không đổi :

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) 7.8. Từ đó suy ra ngay kết quả của các phép nhân (−7).8, 7.(−8), (−7).(−8).

b) 5.23. Từ đó suy ra ngay kết quả của các phép nhân (−5).23, 5.(−23), (−5).(−23).

2. Điền vào ô trống :

a	3		−6	15	−9	
b		−4	−9	−7		6
ab	−21	16			−18	−42

3. Điền dấu "+" hay "−" vào ô trống :

a	+	−	−	+	+	+		
b	−	+	−	+			−	−
ab					+	−	+	−

4. Tìm x sao cho 15x = 75. Không tính toán nói ngay x bằng bao nhiêu nếu :

a) 15.x = − 75 ;

b) (−15) . x = 75 ;

c) (−15) . x = − 75.

5. Cho a là một số nguyên dương. Hỏi b là số nguyên dương hay nguyên âm nếu :

a) ab là một số nguyên dương ;

b) ab là một số nguyên âm.

Cũng câu hỏi như trên với giả thiết a là một số nguyên âm.

§8. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN

Từ các tính chất của phép nhân các số tự nhiên ta suy ra các tính chất sau đây của phép nhân các số nguyên.

1. Tính chất giao hoán

Với mọi a, b ∈ **Z** ta có :

$$ab = ba$$

Tính và so sánh : 7.(−5) và −5 .7 .

2. Tính chất kết hợp

Với mọi a, b, c ∈ **Z** ta có :

$$a(bc) = (ab)c$$

Ta viết tích đó là abc và đọc là tích của a, b,c.

$$abc = a(bc) = (ab)c$$

Tính và so sánh : $7\ [(-6).3]$ và $[7.(-6)].3$.

Tổng quát : Tương tự ta có thể nói về tích của bốn, năm... số nguyên. Nhờ tính chất giao hoán và kết hợp khi thực hiện tích của nhiều số nguyên ta có thể :

1) Thay đổi tùy ý vị trí các thừa số.

2) Đặt dấu ngoặc để nhóm các thừa số một cách tùy ý.

Chú ý : Dễ kiểm tra được kết luận sau :

1) Tích chứa một số chẵn lần thừa số nguyên âm sẽ mang dấu "+".

2) Tích chứa một số lẻ thừa số nguyên âm sẽ mang dấu "−".

3. Nhân với 1

Với mọi $a \in \mathbf{Z}$ ta có :

$$a.1 = 1.a = a$$

4. Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

Với mọi $a, b, c \in \mathbf{Z}$ ta có :

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(b + c)a = ba + ca$$

Ví dụ 1. $(-5)(7 + 3) = (-5).10 = -50.$

$(-5).7 + (-5).3 = (-35) + (-15) = -50.$

Vậy $(-5)(7 + 3) = (-5).7 + (-5).3.$

Ví dụ 2. $(2 - 2).(-3) = 0.(-3) = 0$

$2.(-3) + (-2).(-3) = -6 + 6 = 0.$

Vậy $(2 - 2)(-3) = 2.(-3) + (-2).(-3).$

Chú ý : Ví dụ 2 cho thấy việc xác định $(-2).(-3) = +6$, hay tổng quát tích của hai số nguyên âm là một số nguyên dương, để bảo đảm tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng.

BÀI TẬP

1. Tính bằng hai cách rồi so sánh các kết quả :

a) $(-5).(19 + 21)$; b) $6.(15 + 3)$.

2. Từ tính chất $a(b + c) = ab + ac$ hãy suy ra tính chất $a(b - c) = ab - ac$.

Hướng dẫn : Viết $b - c = b + (-c)$ rồi áp dụng tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng.

3. Bỏ dấu ngoặc rồi tính:

a) $15.(29 - 3) - 29.(15 - 1)$;

b) $(-31).(53 + 2) + 53.(31 - 3)$.

4. Bỏ dấu ngoặc :

a) $a.(b + c - d)$; b) $(-a).(b - c + d)$.

5. Bỏ dấu ngoặc :

a) $(a + b).(c + d)$; b) $(a - b).(c - d)$.

§9. BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN

1. Định nghĩa

Ta nói số nguyên a là bội của số nguyên b ≠ 0 nếu có số nguyên q sao cho $a = b.q$.

Ví dụ : -8 là bội của 2 vì $-8 = 2.(-4)$.

Khi a là bội của b ta cũng nói a chia hết cho b. Và nếu $a = b.q$ ta viết $a : b = q$ (đọc là a chia cho b bằng q).

Khi a là bội của b ta cũng nói b là ước của a.

Ví dụ : các ước của -8 là $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$.

2. Tính chất

1) Nếu a là bội của b và b là bội của c thì a là bội của c.

Thật vậy, nếu $a = bq$ và $b = cp$ thì $a = bq = (cp)q = c(pq)$. Do đó a là bội của c.

2) Nếu a là bội của b thì am cũng là bội của b với mọi $m \in \mathbf{Z}$.

Thật vậy, am là bội của a do đó theo tính chất 1) nếu a là bội của b thì am cũng là bội của b.

3) Nếu a và b là bội của c thì tổng đại số của chúng cũng là bội của c.

Thật vậy, nếu a = cq, b = cp thì a + b = cq + cp = c(q + p) ; a − b = cq − cp = c(q − p).

Do đó a + b, a − b cũng là bội của c.

BÀI TẬP

1. Tìm tất cả các ước của : 3 ; 6 ; 8 ; −13 ; 1.

2. Hãy phát biểu tiếp các kết luận của các câu sau :

a) Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì ...
b) Nếu a chia hết cho b thì am ...
c) Nếu a và b chia hết cho c thì ...

3. Hãy phát biểu tiếp các kết luận của các câu sau :

a) Nếu b là ước của a và c là ước của b thì ...
b) Nếu b là ước của a và m là một số nguyên thì ...
c) Nếu c là ước của a và b thì ...

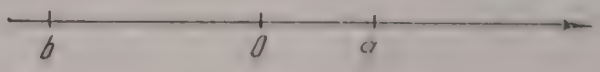
4. Chứng minh rằng nếu a chia hết cho b thì :

a) a chia hết cho −b ;
b) −a chia hết cho b và −b ;
c) |a| chia hết cho |b|.

5. Chứng minh rằng nếu a và b chia hết cho c thì am + bn chia hết cho c, với mọi số nguyên m và n.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1. Cho hai điểm a và b trên trục số (xem hình bên). Hãy :



a) Xác định các điểm $-a$, $-b$ trên trục số ;
b) Xác định các điểm $|a|$, $|b|$ trên trục số.

2. Hãy so sánh :

a) Một số nguyên âm bất kì với số 0 ;

b) Một số nguyên dương bất kì với số 0 ;

c) Một số nguyên âm bất kì với một số nguyên dương bất kì.

3. Các câu sau có đúng không :

a) Tổng của hai số nguyên âm là một số nguyên âm ;

b) Tổng hai số nguyên dương là một số nguyên dương ;

c) Tích hai số nguyên âm là một số nguyên âm ;

d) Tích hai số nguyên dương là một số nguyên dương.

4. Tính tổng đại số sau :

a) $5 - 10 + 15 - 20 + 25 - 30$;
b) $-3 + 6 - 9 + 12 - 15 + 18$.

5. Chứng tỏ rằng $-1.a$ là số đối của a.

6. Tính tổng tất cả các số nguyên x sao cho :

a) $-5 < x < 5$; c) $-15 < x < 14$.
b) $-7 < x < 8$.

7. Tìm a biết :

a) $|a| = 5$; c) $|a| = -5$;
b) $|a| = 0$; d) $|a| = |-7|$.

8. Tính :

a) $35 - 7(19 + 5)$;
b) $9.13 - 9.5$;
c) $-12(13 - 29) + 13(12 - 29)$;
d) $7.60 + 8(-15 - 34)$.

9. Chứng minh :

a) $a(b + c) - b(a - c) = (a + b)c$;
b) $a(b - c) - a(b + d) = -a(c + d)$.

10. Tìm x biết :

a) $3(2x + 8) - (5x + 2) = 0$;
b) $5(7 - 3x) + 7(2 + 2x) = 0$.

Chương II

SỐ HỮU TỈ

§1. PHÂN SỐ

1. Đặt vấn đề

Trong chương I chúng ta đã xây dựng tập hợp **Z** các số nguyên. Trong **Z**, các phép toán cộng, trừ, nhân luôn luôn thực hiện được. Còn phép chia ? 6 : 2 = 3, nhưng 7 : 2 = ? Ta thấy trong **Z** phép chia cho một số a khác 0 không luôn luôn thực hiện được.

Ta đặt vấn đề : mở rộng **Z** thành tập hợp số mới trong đó phép chia cho một số khác 0 luôn thực hiện được. Ở lớp 6 ta đã thấy có thể dùng phân số để ghi kết quả của phép chia. Chẳng hạn, phân số $\frac{5}{6}$ có thể coi là thương của phép chia 5 cho 6. Vì vậy, để giải quyết vấn đề này ở đây ta cũng đưa ra khái niệm phân số.

2. Phân số

Ở lớp 6 một phân số có dạng $\frac{a}{b}$, với a, b $\in$ **N**, b $\neq$ 0; a là tử, b là mẫu của phân số.

Ở đây, ta cũng xét *các phân số* $\frac{a}{b}$ *nhưng tử và mẫu không giới hạn là những số tự nhiên nữa mà là những số nguyên,* $b \neq 0$.

Ví dụ : $\frac{-1}{2}, \frac{1}{-2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{-1}, \frac{0}{-4}$, ... là những phân số.

3. Phân số bằng nhau.

Hai phân số $\frac{a}{b}$ *và* $\frac{c}{d}$ *được gọi là bằng nhau, viết là* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *nếu* $ad = bc$.

Ví dụ : $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$ vì $-2.(-6) = 3.4 = 12$.

4. Tính chất của phân số

1) Với mọi phân số $\frac{a}{b}$ và số nguyên $m \neq 0$ bất kì ta luôn có :

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$$

Nghĩa là : *nhân cả tử và mẫu của một phân số với một số nguyên khác 0 bất kì ta được một phân số bằng phân số đã cho.*

Thật vậy, vì ta luôn có $a.mb = b.ma$.

2) Nếu a và b cùng chia hết cho m thì ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

Thật vậy, nhân cả tử và mẫu của phân số $\frac{a : m}{b : m}$ với m ta được phân số $\frac{a}{b}$.

Nhận xét :

1) Với mỗi phân số $\frac{a}{b}$ bao giờ cũng có vô số phân số bằng nó. Chẳng hạn các phân số $\frac{ma}{mb}$ với $m = -1, 2, -2, 3, -3, ...$

Ví dụ :

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{-3}{-6} = \ldots$$

2) Nếu phân số $\frac{a}{b}$ có mẫu số $b < 0$, bằng cách nhân cả tử số và mẫu số của nó với -1 ta được phân số bằng nó mà có mẫu số dương.

Ví dụ : $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$; $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$.

BÀI TẬP

1. Các phân số sau đây có bằng nhau không ?

$$\frac{3}{2} \text{ và } \frac{-6}{4} \; ; \; \frac{-2}{6} \text{ và } \frac{4}{-12} \; ; \; \frac{1}{3} \text{ và } \frac{-5}{-15} .$$

2. Viết tập hợp các phân số bằng :

a) $\frac{3}{-5}$; b) $\frac{4}{6}$.

3. Quy đồng mẫu số các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ($b > 0$, $d > 0$) nghĩa là viết các phân số bằng chúng có mẫu số chung là một bội chung của b và d. (thường là BCNN).

Quy đồng mẫu số các phân số sau :

$$\frac{-3}{3} \text{ và } \frac{7}{5} \; ; \; \frac{13}{4} \text{ và } \frac{-17}{6} \; ; \; \frac{-11}{7} \text{ và } \frac{-29}{42} .$$

4. Không cần tính toán có thể khẳng định ngay các cặp phân số sau không bằng nhau, tại sao ?

$$\frac{-3}{4} \text{ và } \frac{5}{7} \; ; \; \frac{6}{10} \text{ và } \frac{9}{-13} \; ; \; \frac{2}{3} \text{ và } \frac{2}{-3} .$$

5. Viết phân số với mẫu số dương bằng phân số sau :

$$\frac{4}{-3} \; ; \; \frac{-2}{-7} \; ; \; \frac{-1}{-5} \; ; \; \frac{6}{-1} .$$

§2. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

1. Số hữu tỉ

Các phân số bằng nhau được xem là có cùng một *giá trị*. giá trị đó gọi là một *số hữu tỉ*.

Như vậy, các phân số $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{-2}{4}$, $\frac{2}{-4}$ cũng có giá trị là một số hữu tỉ. Ta nói đó là *số hữu tỉ xác định* bởi các phân số $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{-2}{4}$, ... Hay còn nói các phân số trên là các cách viết khác nhau của cùng một số hữu tỉ.

Để cho gọn, số hữu tỉ xác định bởi phân số $\frac{a}{b}$ cũng gọi là số hữu tỉ $\frac{a}{b}$. Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

Chú ý 1) Mỗi số nguyên a được coi là một số hữu tỉ xác định bởi các phân số :

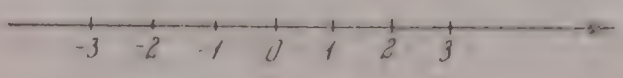
$$\frac{a}{1} = \frac{-a}{-1} = \frac{2a}{2} = \frac{-2a}{-2} = \ldots$$

2) Vì với mỗi phân số $\frac{a}{b}$ bao giờ cũng có những phân số với mẫu số dương bằng nó, nên :

> *Mọi số hữu tỉ đều có thể viết dưới dạng* $\frac{a}{b}$ *với* $b > 0$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

2. Biểu diễn số hữu tỉ trên trục số

Các số nguyên được biểu diễn bởi những điểm rời rạc trên trục số :



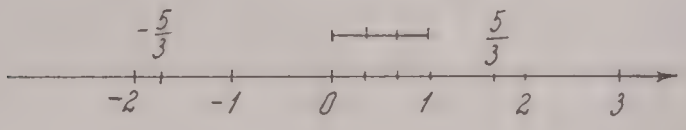
Ta ghi tiếp các số hữu tỉ khác bởi những điểm trên trục số này. Để biểu diễn số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b > 0$ trên trục số ta làm như sau :

1) Chia đoạn đơn bị trục số thành b phần đều nhau. Ta được đoạn đơn vị mới bằng $\frac{1}{b}$ đơn vị cũ.

2) Nếu $a > 0$ thì số $\frac{a}{b}$ được biểu diễn bởi một điểm nằm bên phải điểm 0 và cách 0 một đoạn bằng a lần đơn vị mới.

3) Nếu $a < 0$ thì số $\frac{a}{b}$ được biểu diễn bởi một điểm nằm bên trái điểm 0 và cách 0 một đoạn bằng $|a|$ lần đơn vị mới.

Ví dụ : biểu diễn các số $\frac{5}{3}$ và $\frac{-5}{3}$ trên trục số.



Điểm biểu diễn số hữu tỉ a cũng được gọi là điểm a.

Chú ý : Ta có $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$; $\frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$ .Nếu biểu diễn $\frac{10}{6}$ và $\frac{-10}{6}$ trên trục số ta thấy nó cũng trùng với các điểm $\frac{5}{3}$ và $\frac{-5}{3}$.

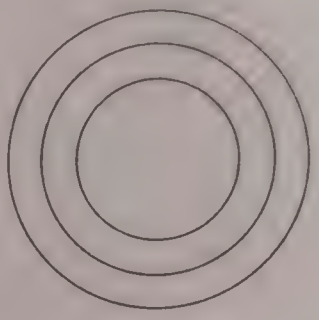
Tổng quát : việc biểu diễn số hữu tỉ trên trục số không phụ thuộc vào cách chọn phân số xác định nó.

BÀI TẬP

1. Các số hữu tỉ sau có bằng nhau không ?

$\frac{4}{12}$ và $\frac{-6}{-18}$; -3 và $\frac{21}{-7}$; $\frac{5}{2}$ và 2 ; $\frac{-25}{60}$ và $\frac{5}{-12}$.

2. Ba hình tròn bên biểu thị ba tập hợp **N, Z, Q**. Hãy chỉ rõ hình tròn nào biểu thị tập hợp nào ?



3. Biểu diễn các số $\frac{3}{2}$, $\frac{-5}{2}$, $\frac{4}{-3}$, trên trục số.

4. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng phân số với cùng mẫu số dương (xem các bài tập 3 và 5 §1 chương II).

a) $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{3}$ và $\frac{-4}{5}$; c) $\frac{4}{-5}$ và 12.

5. Biểu diễn các số $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ trên trục số. Giữa điểm 0 và điểm 1 có bao nhiêu điểm biểu diễn số hữu tỉ ?

6. Viết các số sau dưới dạng phân số có mẫu số là 15 : 1 ; -3 ; $\frac{-1}{5}$; 0.

§3. THỨ TỰ TRONG Q

1. So sánh hai số hữu tỉ

Để so sánh hai số hữu tỉ x, y ta làm như sau :

1) Viết x, y dưới dạng hai phân số với cùng mẫu số dương : chẳng hạn $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$.

2) So sánh hai số nguyên a và b :

• *Nếu $a < b$ ta nói x nhỏ hơn y và viết $x < y$ hay y lớn hơn x và viết $y > x$.*

• *Nếu $b < a$ ta nói y nhỏ hơn x và viết $y < x$ hay x lớn hơn y và viết $x > y$.*

Ví dụ : so sánh các số hữu tỉ x và y với :

1) $x = \frac{4}{15}$; $y = \frac{7}{15}$. Ta có $x < y$ vì $4 < 7$.

2) $x = \frac{-4}{15}$; $y = \frac{-7}{15}$. Ta có $y < x$ vì $-7 < -4$.

3) $x = \frac{-7}{15}$; $y = \frac{4}{15}$. Ta có $x < y$ vì $-7 < 4$.

4) $x = \frac{-5}{6}$; $y = \frac{-6}{7}$. Sau khi quy đồng mẫu số ta có $x = \frac{-35}{42}$, $y = \frac{-36}{42}$. Do đó $y < x$ vì $-36 < -35$.

5) $x = \frac{-25}{7}$; $y = -4$. Ta có $x = \frac{-25}{7}$, $y = \frac{-28}{7}$.

Do đó $y < x$ vì $-28 < -25$.

Chú ý : Theo quy tắc so sánh hai số hữu tỉ và cách biểu diễn chúng trên trục số ta có ngay kết luận :

Nếu $x < y$ thì trên trục số điểm x ở bên trái điểm y.

2. Số hữu tỉ dương, âm

Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương.

Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm.

Số 0 không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.

Ví dụ : $\frac{3}{7}$ là số dương vì $\frac{3}{7} > 0 \left(= \frac{0}{7} \right)$.

$\frac{-5}{12}$ là số âm vì $\frac{-5}{12} < 0 \left(= \frac{0}{12} \right)$.

Nhận xét Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ sẽ :

– là số hữu tỉ dương nếu $a > 0$.

– là số hữu tỉ âm nếu $a < 0$.

BÀI TẬP

1. So sánh các số hữu tỉ sau :

$$\frac{78}{125} \text{ và } \frac{85}{125}; \quad \frac{-29}{43} \text{ và } \frac{-45}{43}; \quad \frac{-75}{11} \text{ và } \frac{1}{11}.$$

$$\frac{-75}{11} \text{ và } \frac{1}{-11}; \quad \frac{15}{-23} \text{ và } -4; \quad \frac{15}{47} \text{ và } 0; \quad \frac{-15}{47} \text{ và } 0.$$

2. So sánh các số hữu tỉ sau :

$$\frac{13}{15} \text{ và } \frac{33}{35}; \quad \frac{-5}{7} \text{ và } \frac{-9}{11}; \quad \frac{-9}{7} \text{ và } \frac{-19}{15}.$$

3. Các số hữu tỉ sau là số hữu tỉ dương hay âm ?

$$\frac{3}{7}; \quad \frac{-5}{29}; \quad \frac{1}{10000}; \quad \frac{8}{-34}; \quad \frac{-49}{-31}.$$

4. Cho số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ khác 0. Chứng minh rằng :

a) Nếu a và b cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ là số dương.

b) Nếu a và b khác dấu thì $\frac{a}{b}$ là số âm.

5. Ta có : nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$. Đó là tính chất bắc cầu của thứ tự. Dựa và tính chất trên hãy giải thích tại sao ta có thể nói ngay :

a) $\frac{3}{4} < \frac{15}{14}$; $\frac{1987}{1986} > \frac{1984}{1985}$. b) $\frac{-18}{173} < \frac{1}{1789}$; $\frac{437}{-521} < \frac{-963}{-217}$.

LUYỆN TẬP

1. Điền dấu "<", hoặc ">", hoặc "=" vào ô trống :

$$\frac{17}{3} \square \frac{85}{15}; \qquad \frac{-5}{11} \square \frac{45}{-99}; \qquad \frac{1931}{475} \square \frac{-1931}{-475}$$

$\frac{3}{7} \square \frac{4}{5}$; $\frac{1}{100000} \square 0$; $\frac{-75}{2} \square \frac{1}{395}$.

$\frac{-1987}{5} \square 0$; $\frac{-4}{5} \square \frac{-3}{7}$; $\frac{-15}{7} \square \frac{9}{-2}$.

2. Tìm 5 số hữu tỉ x sao cho $-1 < x < 0$. Biểu diễn các số tìm được trên trục số.

3. Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b > 0$; $d > 0$). Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nếu $ad < bc$ và ngược lại $ad < bc$ nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Gợi ý : Viết các số hữu tỉ trên dưới dạng phân số với cùng mẫu số là bd.

4. Dựa vào kết quả bài 3 hãy so sánh các số hữu tỉ sau : $\frac{8}{7}$ và $\frac{6}{5}$; $\frac{-13}{11}$ và $\frac{-4}{3}$; $\frac{2}{-3}$ và $\frac{-15}{17}$.

5. Dựa vào bài 3, chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($b > 0$; $d > 0$) thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Từ đó suy ra trên trục số giữa hai điểm hữu tỉ x, y bất kì bao giờ cũng có một điểm hữu tỉ.

§4. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ TRONG Q

1. Cộng hai số hữu tỉ

Để cộng hai số hữu tỉ x và y ta làm như sau :

1) Viết x, y dưới dạng hai phân số có cùng mẫu số dương (bằng cách quy đồng mẫu số) : $x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{b}{m}$.

2) Thực hiện phép cộng :

$$x + y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} .$$

Ví dụ : $\frac{-1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{-3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{-3+10}{12} = \frac{7}{12}$.

$\frac{3}{5} + \frac{-7}{2} = \frac{6}{10} + \frac{-35}{10} = \frac{6+(-35)}{10} = \frac{-29}{10}$.

$\frac{-2}{13} + 4 = \frac{-2}{13} + \frac{52}{13} = \frac{-2+52}{13} = \frac{50}{13}$.

Chú ý : 1) Nếu hai số hữu tỉ x, y không âm thì quy tắc cộng trên trùng với quy tắc cộng phân số đã biết ở lớp 6.

2) Ta có :

$$\frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}; \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{-2}{8} + \frac{10}{12} = \frac{-6}{24} + \frac{20}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{5}{6}.$$

Tổng quát : Kết quả phép cộng các số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phân số xác định các số hữu tỉ đó.

2. Số đối

Nhận xét : Theo quy tắc cộng trên ta luôn có :

$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a+(-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$. Ta nói $\frac{-a}{b}$ là *số đối* của $\frac{a}{b}$ và cũng nói $\frac{a}{b}$ là số đối của $\frac{-a}{b}$.

Mỗi số hữu tỉ x đều có một số đối, kí hiệu là −x, sao cho : $x + (-x) = 0$.

Tìm số đối của các số sau : $\frac{4}{9}; \frac{-3}{2}; \frac{5}{-7}$.

3. Trừ hai số hữu tỉ

Hiệu của hai số hữu tỉ x và y, kí hiệu x − y, là tổng của x và số đối của y :

$$\boxed{x - y = x + (-y)}$$

Ví dụ : $\frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{-15}{35} = \frac{14 + (-15)}{35} = \frac{-1}{35}$.

$$\frac{4}{3} - \frac{-1}{5} = \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{20}{15} + \frac{3}{15} = \frac{20 + 3}{15} = \frac{23}{15}.$$

BÀI TẬP

1. Tính :

a) $\frac{32}{115} + \frac{-71}{115}$; $\frac{45}{1986} + \frac{61}{1986}$; $\frac{-19}{703} + \frac{-81}{703}$.

b) $\frac{61}{11} + \frac{9}{13}$; $\frac{-3}{4} + \frac{5}{6}$; $\frac{11}{3} + \frac{-52}{15}$; $\frac{-7}{5} + 12$.

c) $\frac{15}{4} + \frac{-10}{25}$; $\frac{8}{9} + \frac{6}{5}$; $\frac{-13}{5} + \frac{-17}{2}$.

2. a) Tính tổng $\frac{7}{3} + \frac{-5}{9}$. Từ đó có thể suy ra ngay kết quả của phép cộng sau không : $\frac{35}{15} + \frac{-20}{36}$; $\frac{28}{12} + \frac{-10}{18}$? Tại sao ?

b) Tính các tổng dưới đây, sau khi rút gọn phân số :

$$\frac{20}{30} + \frac{25}{35}; \frac{16}{24} + \frac{-21}{14}; \frac{-16}{20} + \frac{-12}{18}.$$

3. Dựa vào định nghĩa của phép cộng và phép trừ hãy chứng minh các quy tắc cộng và trừ hai số hữu tỉ sau đây :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

4. Tìm số đối của các số hữu tỉ sau :

$$\frac{2}{3}; -5; \frac{-3}{5}; \frac{4}{-9}; \frac{7}{8}; 12; 0{,}125.$$

5. Tính :

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{3} : 4 - \frac{39}{8} ; \quad \frac{12}{17} - (-2) ; \quad \frac{53}{27} - \frac{8}{3} .$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{25} ; \quad \frac{-2}{81} - \frac{-3}{81} ; \quad -\frac{3}{18} - \frac{5}{24} .$$

LUYỆN TẬP

1. Tính và so sánh :

a) $\frac{1}{3} + \frac{-2}{5}$ và $\frac{-2}{5} + \frac{1}{3}$;

b) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) + \frac{-1}{3}$ và $\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{3} + \frac{-1}{3}\right)$;

Từ đó phát biểu tổng quát về tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng các số hữu tỉ.

2. Đổi các hỗn số thành phân số và thực hiện phép tính :

a) $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}$; b) $-4\frac{2}{5} + 1$;

c) $1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}$; d) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$.

3. Cho $x, y \in \mathbf{Q}$. Chứng minh :

$$-(x + y) = -x - y.$$

Từ đó nêu lên quy tắc bỏ dấu ngoặc đối với các số hữu tỉ.

4. Tìm số đối của tổng sau :

a) $3 - \frac{7}{3}$; b) $\frac{12}{5} + \frac{4}{3}$;

c) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$; d) $-\frac{3}{2} - \frac{4}{5}$.

5. Bỏ dấu ngoặc trong biểu thức sau :

a) $\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$; b) $\frac{3}{5} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{7}\right)$;

c) $-\frac{10}{3} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$; d) $-2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$.

§5. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

1. Giá trị tuyệt đối

Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x, kí hiệu $|x|$, được xác định như sau :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geqslant 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ :

$x = \frac{15}{7} \Rightarrow |x| = \frac{15}{7}$; $x = 0{,}175 \Rightarrow |x| = 0{,}175$.

$x = -\frac{7}{3} \Rightarrow |x| = \frac{7}{3}$; $x = -3{,}153 \Rightarrow |x| = 3{,}153$.

2. Cộng và trừ số thập phân

Ở lớp 6 ta đã biết các số thập phân.

Ví dụ :

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} \; ; \; 1{,}37 = \frac{137}{100} \; ; \; 4{,}269 = \frac{4269}{1000} \; .$$

Đó là những số hữu tỉ dương, cũng gọi là số thập phân dương. Số đối của chúng :

$$-0{,}125 = -\frac{125}{1000} \; ; \; -1{,}37 = -\frac{137}{100} \; ; \; -4{,}269 = -\frac{4269}{1000} \; .$$

Đó là những số hữu tỉ âm, cũng gọi là những số thập phân âm.

Như vậy, trong **Q** có các số thập phân dương mang dấu "+" (mà ta thường không viết theo quy ước) và các số thập phân âm mang dấu "−".

Để thực hiện phép cộng hai số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số rồi làm theo quy tắc đã biết. Tuy nhiên trong thực hành ta thường cộng hai số thập phân theo quy tắc cộng hai số nguyên (Chương I §3).

Ví dụ :

$$(-0,320) + (-1,151) = \frac{-320}{1000} + \frac{-1151}{1000} = \frac{-320 + (-1151)}{1000} =$$

$$= \frac{-1471}{1000} = -1,471 .$$

Trong thực hành ta làm như sau :

$$(-0,320) + (-1,151) = -(0,320 + 1,151) = -1,471.$$

Cũng vậy :

$$3,142 + (-1,253) = 3,142 - 1,253 = 1,889.$$

$$0,975 + (-2,167) = -(2,167 - 0,975) = -1,192.$$

3. Tổng đại số

Vì phép trừ cũng là phép cộng (với số đối của số trừ) nên một dãy các phép tính cộng, trừ các số hữu tỉ được gọi là một *tổng đại số*. Nhờ các tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng các số hữu tỉ ta có các kết luận sau : *Trong tổng đại số các số hữu tỉ ta có thể :*

1) đổi chỗ một cách tùy ý các số hạng kèm theo dấu của chúng ;

2) đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý nhưng chú ý rằng nếu trước dấu ngoặc là dấu "–" thì phải đổi dấu các số hạng trong ngoặc.

BÀI TẬP

1. Tính $|x|$ với :

a) $x = \frac{-3}{5}$; b) $x = \frac{-2}{-15}$;

c) $x = -0,321$; d) $x = -4\frac{1}{3}$;

2. Tính x biết :

a) $|x| = \frac{1}{3}$; b) $|x| = 0,25$;

c) $|x| = 0$; d) $|x| = 1\frac{1}{2}$.

3. Tính :

a) 7,12 - 5,435 ; b) 0,731 - 3,125 ;

c) -4,15 - 0,273 ; d) -3,42 + 1,35.

4. Tính :

a) -0,4 - (5,6 - 2,3) ; b) $2\frac{3}{4} - \frac{3}{8} - 1\frac{1}{2}$;

c) $1,2 + \left(2\frac{1}{2} - 0,4\right)$; d) $0,25 - \frac{2}{5} + 2\frac{1}{5}$

5. Tìm x biết :

a) $|x - 3,2| = 1,5$;

b) $0,25 - |1,5 - x| = 0$.

§6. PHÉP NHÂN TRONG Q

1. Nhân hai số hữu tỉ

Tích của hai số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ *được xác định như sau :*

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ví dụ : $\frac{-3}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{(-3) \cdot 7}{2 \cdot 10} = \frac{-21}{20}$.

$\frac{-5}{3} \cdot \frac{-6}{11} = \frac{(-5) \cdot (-6)}{3 \cdot 11} = \frac{30}{33}$.

$2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{2}{5}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{7 \cdot (-7)}{3 \cdot 5} = \frac{-49}{15}$.

$$(1,2) \cdot (2,3) = \frac{12}{10} \cdot \frac{23}{10} = \frac{276}{100} = 2,76 .$$

Chú ý : 1) Nếu x, y là hai số hữu tỉ không âm thì quy tắc nhân trên trùng với quy tắc nhân hai phân số đã biết ở lớp 6.

2) Khi nhân hai số hữu tỉ x và y ta có thể nhân hai phân số bất kì trong các phân số xác định x và y thì kết quả cũng không thay đổi.

Ví dụ :

$$\frac{-3}{2} = \frac{-6}{4} ; \quad \frac{7}{10} = \frac{14}{20} .$$

$$\frac{-6}{4} \cdot \frac{14}{20} = \frac{(-6) \cdot 14}{4 \cdot 20} = \frac{-84}{80} = \frac{-21}{20} .$$

2. Nhân hai số thập phân

Khi nhân hai số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số và thực hiện phép nhân theo quy tắc trên. Tuy nhiên trong thực hành tả thường nhận hai số thập phân theo quy tắc nhân hai số nguyên (Chương I §7) :

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y| & \text{nếu } x, y \text{ cùng dấu} \\ -(|x| \cdot |y|) & \text{nếu } x, y \text{ khác dấu} \end{cases}$$

Ví dụ :

$$(-1,325) \cdot (-0,15) = \left(\frac{-1325}{1000}\right) \cdot \left(\frac{-15}{100}\right) =$$

$$= \frac{(-1325) \cdot (-15)}{100000} = \frac{19875}{100000} = 0,19875 .$$

hay : $(-1,325) \cdot (-0,15) = 1,325 \cdot 0,15 = 0,19875.$

Cũng vậy : $(-1,325) \cdot 0,15 = -(1,325 \cdot 0,15) = -0,19875.$

BÀI TẬP

1. Tính : $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} ; \left(\frac{-8}{25}\right) \cdot \frac{15}{4} ; \left(\frac{-20}{31}\right) \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) ;$

$$8 \cdot \frac{3}{2} \; ; \; 1 \cdot \left(\frac{-29}{7}\right) \; ; \; 0 \cdot \frac{1}{1000} \; .$$

2. Tính :

$$3\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{2} ; \left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot 3\frac{1}{2} ; \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) ; \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot 5 \; .$$

3. Tính :

a) 0,12 . 1,25 ; (−0,12) . 1,25 . (−0,12) . (−1,25).

b) 1,35 . 2,6 ; (−5,3) . 4,15 ; (−0,6) . (−1,15).

4. Tính và so sánh :

a) $\left(\frac{-3}{2}\right) \cdot \frac{4}{5}$ và $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)$; b) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{4}$.

Từ đó phát biểu tổng quát về tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân các số hữu tỉ.

5. Tính nhanh :

a) (−0,35 . 0,4).2,5 ; b) (0,125.0,72).(−8).

§7. PHÉP CHIA TRONG Q

1. Số nghịch đảo

Nếu $\frac{a}{b}$ là một số hữu tỉ khác 0 thì ta luôn có :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

Số hữu tỉ $\frac{b}{a}$ gọi là *số nghịch đảo* của $\frac{a}{b}$.

Vậy :

Mỗi số hữu tỉ $x \neq 0$ đều có số nghịch đảo, kí hiệu là x^{-1} sao cho :

$$x.x^{-1} = 1$$

Ví dụ : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{3}$.

$(0,25)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$; $(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Chú ý : Nếu x^{-1} là số nghịch đảo của x thì ngược lại x lại là số nghịch đảo của x^{-1}, vì vậy ta có :

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

2. Chia hai số hữu tỉ

Thương của hai số hữu tỉ x, y với y ≠ 0 là tích xy^{-1}.

Thương của x và y kí hiệu là x : y hay $\frac{x}{y}$ (đọc là x chia cho y). Vậy :

$$x : y = xy^{-1}.$$

Nếu $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ thì $y^{-1} = \frac{d}{c}$ do đó $xy^{-1} = \frac{ad}{bc}$.

Vậy :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ví dụ : $\frac{3}{2} : \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-9}{10}$.

3. Chia hai số thập phân

Khi chia hai số thập phân ta có thể viết chúng dưới dạng phân số rồi thực hiện phép chia như trên. Tuy nhiên, trong thực hành ta thường đưa về phép chia hai số thập phân theo quy tắc sau :

Thương của hai số thập phân x và y là thương của $|x|$ *và* $|y|$ *với dấu "+" đằng trước nếu x và y cùng dấu và với dấu "−" đằng trước nếu x và y khác dấu.*

Ví dụ : $-(59,5) : 0,17 = -(59,5 : 0,17) = -350.$

$(-59,5) : (-0,17) = +(59,5 : 0,17) = 350.$

BÀI TẬP

1. Tìm số nghịch đảo của các số hữu tỉ sau :

$$\frac{-1}{2} ; \frac{-2}{5} ; 6 ; 0,125 ; -3\frac{1}{2}.$$

2. Tính :

$$1 : 7 ; (-1) : \frac{3}{8} ; \frac{9}{10} : \left(-\frac{15}{11}\right) ; \frac{23}{42} : 3 ;$$

$$\left(-\frac{17}{61}\right) : \frac{4}{27} ; \left(-\frac{1}{31}\right) : (-7) ; 3\frac{1}{2} : \frac{2}{3} ; (-0,25) : \frac{3}{4}.$$

3. Chứng minh rằng $(x : y).y = x$. Nói cách khác thương của hai số hữu tỉ x và y là một số hữu tỉ z sao cho $z.y = x$.

4. Tính : $2,35 : 1,25$; $(-3,75) : 5$; $(-0,15) : (-0,3)$.

5. Dựa vào định nghĩa phép chia, chứng tỏ rằng :

a) $\frac{xy}{z} = \frac{x}{z} \cdot y = x \cdot \frac{y}{z}$; $\quad x, y, z \in Q, z \neq 0.$

Gợi ý : Viết $\frac{xy}{z} = (xy)z^{-1}$.

b) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ với mọi số hữu tỉ $x \neq 0$.

§8. TÍNH CHẤT PHÂN PHỐI CỦA PHÉP NHÂN ĐỐI VỚI PHÉP CỘNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phép nhân phân phối đối với phép cộng và phép trừ

Tính và so sánh :

a) $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3}$.

b) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$ và $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$.

Tổng quát ta có tính chất sau :

$$x(y + z) = xy + xz$$
$$x(y - z) = xy - xz$$

2. Chia một tổng hoặc một hiệu cho một số

Từ tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng hoặc trừ ta suy ra kết quả sau về phép chia một tổng hoặc một hiệu cho một số :

$$\frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$
$$\frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

Nghĩa là : muốn chia một tổng (hoặc một hiệu) cho một số ta chia từng số hạng của tổng (hoặc hiệu) cho số đó rồi lấy tổng (hoặc hiệu) các thương tìm được.

Thật vậy, ta có :

$$\frac{x + y}{z} = (x + y) \cdot z^{-1} = xz^{-1} + yz^{-1} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

$$\frac{x - y}{z} = (x - y) \cdot z^{-1} = xz^{-1} - yz^{-1} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}.$$

3. Khai triển một tích

Áp dụng nhiều lần tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ ta tính được tích của các tổng hoặc hiệu.

Ví dụ :

$$(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d = ac + bc - (ad + bd)$$
$$= ac + bc - ad - bd.$$

Ta nói rằng ta đã *khai triển tích* $(a + b)(c - d)$.

4. Đặt thừa số chung

Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ thường được áp dụng theo chiều ngược lại : *Khi có một tổng đại số của nhiều số mà các số hạng của nó có chung một thừa số, thì ta có thể đặt thừa số đó ra ngoài thành thừa số chung của tổng.*

Ví dụ : $ab - ac + da = a(b - c + d)$.

$15 + 21 - 33 = 3(5 + 7 - 11) = 3.1 = 3$.

BÀI TẬP

1. Tính bằng hai cách :

a) $\frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right)$; b) $\left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right).25 - 15$.

2. Tính biểu thức $15(x + y)$ theo cách nào tốt nhất trong các trường hợp sau :

a) $x = 2{,}05$, $y = -0{,}05$;

b) $x = -2\frac{1}{5}$, $y = 1\frac{2}{3}$.

3. Tính :

a) $\frac{14{,}93}{5} + \frac{0{,}07}{5}$; b) $\frac{21{,}35}{4} - \frac{1{,}35}{4}$.

4. Khai triển các tích sau :

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)(2c - 3d)$.

5. Đặt thừa số chung và tính các tổng sau :

a) $21 + 35 + 77 - 140$; b) $60 + 105 - 225$.

LUYỆN TẬP

1. Tính :

$$1 + \frac{1}{2} \; ; \; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \; ; \; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \; .$$

2. Tính :

$$-2 + \frac{1}{2} \; ; \quad -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \; ; \quad -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} \; .$$

3. Dựa vào định nghĩa của số nghịch đảo và phép chia chứng minh :

a) $(xy)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$; b) $\frac{x}{z}.y = \frac{x}{\left(\frac{z}{y}\right)}$;

c) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{z} = \frac{x}{y.z}$.

4. Viết thương thành tích :

a) $\frac{17}{15} : \frac{4}{3}$; b) $\frac{-12}{21} : \frac{34}{43}$;

c) $\frac{9}{7} : (-3)$; d) $11 : \frac{14}{37}$.

5. Viết tích thành thương :

a) $\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)$; b) $\frac{-25}{4} \cdot 3$; c) $72 \cdot \left(\frac{31}{15}\right)$.

§9. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

Cho n là số tự nhiên khác 0. *Tích của n lần số hữu tỉ x được viết gọn là x^n và đọc là x lũy thừa n.* Vậy với $n \neq 0$:

$$x^n = \underbrace{x.x...x}_{n \text{ lần}}$$

x^n gọi là một lũy thừa, x gọi là cơ số, n gọi là số mũ của lũy thừa đó.

Nếu $x = \frac{a}{b}$ thì $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}.\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b} = \frac{a.a\ldots a}{b.b\ldots b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Vậy :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Ví dụ : Tính $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27}$.

$$(-0{,}25)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{(-1)^2}{4^2} = \frac{1}{16};$$

$$(-0{,}25)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{4^3} = \frac{-1}{64}.$$

Quy ước Với mọi số hữu tỉ $x \neq 0$, đặt :

$$\boxed{x^0 = 1}$$

Vậy:

- Lũy thừa với số mũ 0 chỉ xác định khi cơ số khác 0.
- Lũy thừa 0 của mọi số hữu tỉ khác 0 luôn luôn bằng 1.

2. Tích của hai lũy thừa cùng cơ số

Với số tự nhiên a ta đã biết $a^n.a^m = a^{n+m}$. Cũng vậy, với số hữu tỉ x ta có :

$$\boxed{x^n.x^m = x^{n+m}}$$

Nghĩa là : *Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ với nhau.*

Chứng minh : Nếu $n > 0$ và $m > 0$ thì

$$x^n.x^m = \underbrace{x.x\ldots x}_{n\text{ lần}}.\underbrace{x.x\ldots x}_{m\text{ lần}} = \underbrace{x.x\ldots x}_{n+m\text{ lần}} = x^{n+m}.$$

Trường hợp n = 0 hoặc m = 0 công thức là hiển nhiên.

Ví dụ :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

BÀI TẬP

1. Tính : $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;

$(-0,4)^2$; $(-0,4)^3$; $\left(1\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(1\frac{3}{4}\right)^3$; $(1031)^0$.

2. Tính : $(-0,2)^2$: $(-0,2)^3$; $(-0,2)^4$; $(-0,2)^5$.

Hãy rút ra nhận xét về dấu của lũy thừa với số mũ chẵn và lũy thừa với số mũ lẻ của một số âm.

3. Tìm x biết :

a) $x^2 = 4$; b) $x^3 = 8$; c) $x^3 = -8$.

4. a) Tính : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $(-2)^3\ (-2)^4$; $x^2 \cdot x^5$.

b) Tìm x biết :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot x = \left(\frac{2}{3}\right)^7 ; \left(-\frac{1}{2}\right)^3 x = \frac{1}{64}.$$

5. Hãy tìm quan hệ giữa hai số hữu tỉ x và y biết :

a) $x^2 = y^2$; b) $x^3 = y^3$.

§10. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ *(tiếp theo)*

1. Thương của hai lũy thừa cùng cơ số

Với số tự nhiên a ta đã biết $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (m > n). Cũng vậy, nếu x là số hữu tỉ khác 0, m, n là hai số tự nhiên và m ⩾ n thì :

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Nghĩa là : *Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của lũy thừa bị chia trừ đi số mũ của lũy thừa chia.*

Chứng minh :

Theo công thức nhân hai lũy thừa cùng cơ số ta có :

$$x^n.x^{m-n} = x^{n+(m-n)} = x^m.$$

Vậy :
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

Ví dụ : $\frac{3^5}{3^2} = 3^3$; $\frac{(-0,75)^7}{(-0,75)^5} = (-0,75)^2$.

Chú ý : Trong công thức trên có điều kiện $m \geq n$ vì ở đây chỉ xét lũy thừa với số mũ tự nhiên. Trên thực tế người ta còn xét cả lũy thừa với số mũ âm của một số khác 0 với quy ước viết :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0).$$

Ví dụ :

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}.$$

Khi đó công thức trên đúng với mọi m và mọi n.

2. Lũy thừa của lũy thừa

Ta có công thức :

$$\boxed{(x^m)^n = x^{m.n}}$$

Nghĩa là : *Khi tính lũy thừa của một lũy thừa ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ với nhau.*

Chứng minh :

- Nếu $m > 0$, $n > 0$ thì

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m.x^m. \ . \ .x^m}_{n \text{ lần}} = \underbrace{\underbrace{(x.x. \ . \ .x)}_{m \text{ lần}} \underbrace{(x.x. \ . \ .x)}_{m \text{ lần}} \ . \ . \ . \underbrace{(x. \ x. \ . \ .x)}_{m \text{ lần}}}_{n \text{ lần}}$$

$$= \underbrace{x.x. \ . \ .x}_{m.n \text{ lần}} = x^{m.n}$$

- Nếu m = 0 hoặc n = 0 công thức là hiển nhiên.

Ví dụ :

$$\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^6 ;$$

$$((0,125)^3)^4 = (0,125)^{12}.$$

BÀI TẬP

1. Tính : $\frac{(0,5)^5}{(0,5)^2}$; $\frac{\left(\frac{17}{2}\right)^7}{\left(\frac{17}{2}\right)^6}$; $\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ $(n \geq 1)$.

2. Tính và so sánh :

a) $\frac{3^4}{3^2}$ và 3^2 ;

b) $((-0,2)^2)^3$ và $(-0,2)^6$;

c) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^0$ và $\left(\frac{2}{3}\right)^0$;

d) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^0\right)^5$ và $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$.

3. Tìm n biết :

a) $\frac{27}{3^n} = 3$;

b) $\frac{-32}{(-2)^n} = 4$;

c) $((-0,5)^3)^n = \frac{1}{64}$;

d) $(x^n)^2 = x^{14}$ $x \neq 0$ và $x \neq 1$

4. Từ đẳng thức $(-1)^2 = (-1).(-1) = 1$. Chứng tỏ rằng :

a) $(-1)^{2n} = 1$;

b) $(-1)^{2n+1} = -1$.

Với mọi số tự nhiên n.

5. Cho biết $x^6 = a$, $x^4 = b$. Chứng minh $a^2 = b^3$.

§11. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ *(tiếp theo)*

1. Lũy thừa của một tích

$$\boxed{(x.y)^n = x^n.y^n}$$

Nghĩa là : *Lũy thừa của một tích bằng tích các lũy thừa.*

Ví dụ :

$$20^5 = (2.10)^5 = 2^5.10^5 = 32.100000 = 3200000$$

$$2^5.5^5 = (2.5)^5 = 10^5 = 100000.$$

Chứng minh : Với $n > 0$ ta có :

$$(xy)^n = \underbrace{(x.y)\ (x.y). \ . \ .(xy)}_{\text{n lần}} = \underbrace{(x.x. \ . \ .x)}_{\text{n lần}}\ \underbrace{(y.y. \ . \ .y)}_{\text{n lần}}$$

$$= x^n.y^n$$

(theo tính giao hoán và kết hợp của phép nhân).

Nếu $n = 0$ thì đẳng thức là hiển nhiên.

2. Lũy thừa của một thương

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}}$$

Nghĩa là : *Lũy thừa của một thương bằng thương của các lũy thừa.*

Ví dụ : $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

$$\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Chứng minh : Theo công thức về lũy thừa của một tích ta có :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n . y^n = \left(\frac{x}{y} . y\right)^n = x^n.$$

Vậy : $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

BÀI TẬP

1. Tính : $\left(\frac{1}{5}\right)^7 . 5^7$; $(0,25)^3 . 64$; $(0,5)^5 . 128$.

2. Tính : $\frac{(60)^3}{(12)^3}$; $\frac{(45)^5}{(15)^5}$; $\frac{(7,5)^4}{(2,5)^4}$.

3. Tính : $(0,25)^4 . (40)^4$; $(-0,125)^5 . (80)^5$.

4. Chứng minh :

a) $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

b) $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$.

Gợi ý : Viết $-x = -1.x$ rồi áp dụng công thức lũy thừa của một tích.

5. Tìm x biết $x^2 = x$.

LUYỆN TẬP

1. Tìm x biết : $x^2 = \frac{1}{64}$; $x^3 = -0,125$; $x^5 = -1$.

2. Tìm giá trị của các biểu thức sau :

a) $\frac{4^5 . 4^6}{2^{21}}$; b) $\frac{8^5 . 16^3}{4^{13}}$;

c) $\frac{125^{12}}{5^{13} . 25^{11}}$; d) $\frac{81^{11} . 3^{17}}{27^{10} . 9^{15}}$.

3. Cho biết $x^2 = a$, $x^3 = b$. Tính : x^4; x^5; x^6; x^7; x^8.

4. Rút gọn biểu thức sau bằng cách nhóm các lũy thừa cùng cơ số :

a) $a^3 b^2 a^5 b$; b) $(-x)^2 y\, x^7\, (-y)^3$.

5. Tính : $x^5 y^3 : (xy)^2$; $a^3 (bc)^7 : b^4 c^5$.

6. Viết x^9 dưới dạng :

a) Tích của hai lũy thừa trong đó có một thừa số là x^3;

b) Lũy thừa của x^3;

c) Thương của hai lũy thừa trong đó số bị chia là x^{12}.

§12. TỈ LỆ THỨC

1. Tỉ số

Thương trong phép chia của số hữu tỉ a cho số hữu tỉ $b \neq 0$ gọi là tỉ số của a và b.

Tỉ số của a và b kí hiệu là $\frac{a}{b}$ hay a : b.

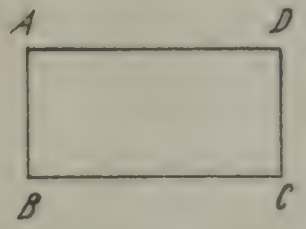
Khái niệm tỉ số thường được dùng khi nói về thương của hai đại lượng (theo cùng một đơn vị đo).

Ví dụ :

a) Tỉ số của chu vi l một hình vuông và cạnh a của nó luôn luôn bằng 4.

b) Tỉ số của chu vi l và đường kính d của một đường tròn là một số không đổi (gần bằng 3,14).

c) Tỉ số của chiều rộng và chiều dài hình chữ nhật ABCD là $\frac{2}{3}$ nghĩa là :



$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

Chú ý : Khi nói về tỉ số của hai đại lượng, ta không quan tâm đến độ lớn của chúng, mà chỉ quan tâm đến mối tương quan giữa chúng. Chẳng hạn, trong ví dụ 3 ta không biết chiều rộng và chiều dài hình chữ nhật ABCD bằng bao nhiêu mà chỉ biết chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài. Như vậy, có thể AB = 2cm, BC = 3 cm; AB = 10cm, CD = 15cm; AB = 14m, BC = 21m.

2. Tỉ lệ thức

Một đẳng thức giữa hai tỉ số được gọi là một tỉ lệ thức

Ví dụ :

$$\frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

$$\frac{15}{8} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} : \frac{1}{3}$$

là những tỉ lệ thức.

BÀI TẬP

1. Lớp 7A có 40 học sinh trong đó có 15 em nam. Tính tỉ số giữa học sinh nam và học sinh nữ của lớp.

2. Một lớp có 45 học sinh. Tỉ số học sinh đạt loại giỏi và tiên tiến so với cả lớp là $\frac{2}{3}$. Tính số học sinh giỏi và tiên tiến của lớp.

3. Thay tỉ số giữa các số hữu tỉ bằng tỉ số giữa các số nguyên :

a) $\frac{10}{12} : \frac{6}{25}$; b) $1,7 : 2,85$;

c) $\frac{1}{5} : 0,25$; d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \in Z)$.

4. Các tỉ số sau đây có lập thành tỉ lệ thức không ?

a) $\frac{3}{7}$ và $\frac{6}{14}$; b) $\frac{8}{5} : \frac{1}{2}$ và $\frac{16}{3} : \frac{5}{6}$;

c) $0,4 : \frac{5}{3}$ và $\frac{3}{5}$; d) $0,25 : 1,75$ và $\frac{3}{21}$.

5. Có thể lập được tỉ lệ thức từ các số sau đây không ? Nếu có hãy viết tỉ lệ thức đó.

a) 18 ; 6 ; −21 ; −7 ;

b) 10 ; 8 ; 1,2 ; 1,5 ;

c) $3x$; $2x$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$.

§13. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC

1.

> Từ *tỉ lệ thức* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *suy ra* $ad = bc$

Thật vậy, nhân cả hai vế của tỉ lệ thức trên với bd ta được:

$$\frac{a}{b}.bd = \frac{c}{d}.bd \text{ hay } ad = bc.$$

Ví dụ : Từ tỉ lệ thức $\frac{0,2}{1,5} = \frac{0,6}{4,5}$ ta có :

$$0,2.4,5 = 0,6.1,5 = 0,9.$$

Hệ quả : Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $a = \frac{bc}{d}$, $c = \frac{ad}{b}$, $b = \frac{ad}{c}$, $d = \frac{bc}{a}$.

2.

> *Đẳng thức ad = bc với a, b, c, d khác 0 cho ta các tỉ lệ thức :*
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Thật vậy, chẳng hạn, nhân cả hai vế đẳng thức trên với $d^{-1}b^{-1}$ ta được :

$$ad.d^{-1}b^{-1} = bcd^{-1}b^{-1}.$$

hay $$ab^{-1} = cd^{-1}$$

hay $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Ví dụ : Từ đẳng thức $3.15 = 9.5$ ta có các tỉ lệ thức :

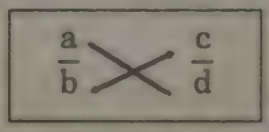
$$\frac{3}{9} = \frac{5}{15}; \frac{3}{5} = \frac{9}{15}; \frac{15}{9} = \frac{5}{3}; \frac{15}{5} = \frac{9}{3}.$$

3.

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *suy ra các tỉ lệ thức :*

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Nói cách khác trong tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta có thể đổi chỗ các thành phần a với d và b với c cho nhau.



(Đổi chỗ a với d, hoặc đổi chỗ b với c, hoặc đổi chỗ đồng thời a với d và b với c).

Tính chất này là hệ quả của các tính chất 1 và 2. Theo tính chất 1 từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra ad = bc. Theo tính chất 2 từ đẳng thức ad = bc suy ra các tỉ lệ thức $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

BÀI TẬP

1. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ đẳng thức sau :

a) 0,05.36 = 1,5.1,2 ;

b) 14.15 = 10.21 ;

c) xy = u.v.

2. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{15}{21} = \frac{40}{56}$; b) $\frac{0,15}{3,1} = \frac{0,3}{6,2}$;

c) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

3. Lập tất cả các tỉ lệ thức có thể được từ các số sau :

a) 0,16 ; 0,32 ; 0,4 ; 0,8 ;

b) $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{10}$.

4. Tìm thành phần chưa biết của tỉ lệ thức :

a) $\frac{x}{6} = \frac{8}{3}$; b) $\frac{35}{x} = \frac{15}{12}$; c) $\frac{12}{10} = \frac{x}{45}$; d) $\frac{21}{14} = \frac{33}{x}$.

5. Một chiếc ôtô và một chiếc môtô cùng chạy trên một quãng đường. Vận tốc ôtô gấp 1,2 lần vận tốc môtô. Hỏi nếu môtô tăng vận tốc thêm 5km/h thì ôtô phải tăng vận tốc thêm bao nhiêu để tỉ số vận tốc giữa hai xe không đổi.

6. Chứng minh từ đẳng thức ad = bc suy ra được tỉ lệ thức $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

§14. TÍNH CHẤT CỦA DÃY CÁC TỈ SỐ BẰNG NHAU

1.

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *suy ra các tỉ lệ thức sau :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$$

Ví dụ : Từ tỉ lệ thức :

$\frac{2}{3} = \frac{0,2}{0,3}$ suy ra các tỉ lệ thức :

$\frac{2}{3} = \frac{2,2}{3,3}$ và $\frac{2}{3} = \frac{1,8}{2,7}$.

Chứng minh :

Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta có đẳng thức $ad = bc$. Cộng ab vào hai vế đẳng thức này ta được :

$$ad + ab = bc + ab$$

hay

$$a(b + d) = b(a + c).$$

Nhưng đẳng thức này lại cho ta tỉ lệ thức :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} .$$

2. Tính chất trên còn được mở rộng cho dãy các tỉ số bằng nhau. Chẳng hạn :

Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ *suy ra các tỉ lệ thức*

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

Ví dụ : Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{1}{2} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{7}{14}$ ta có :

$$\frac{1}{2} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{7}{14} = \frac{1+0,25+7}{2+0,5+14} = \frac{8,25}{16,5} .$$

3. Số tỉ lệ

Khi nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 3, 5, 7 tức là ta có :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} .$$

Ví dụ : Ba cổ đông góp vốn theo tỉ lệ 3, 5, 7 nghĩa là nếu gọi x, y, z là số vốn đóng góp tương ứng của ba cổ đông thì :

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} .$$

BÀI TẬP

1. Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{7} = \frac{y}{13}$ và $x + y = 40$.

2. Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{19} = \frac{y}{21}$ và $x - y = 4$.

3. Tìm diện tích một hình chữ nhật biết rằng tỉ số giữa hai cạnh của nó bằng $\frac{2}{3}$ và chu vi bằng 20m.

4. Tỉ số sản phẩm làm được của hai công nhân là 0,9. Hỏi mỗi người làm được bao nhiêu sản phẩm, biết rằng người này làm nhiều hơn người kia 120 sản phẩm.

5. Ba nhà sản xuất góp vốn theo tỉ lệ 3, 5, 7. Hỏi mỗi người phải đóng góp bao nhiêu, biết rằng số vốn cần huy động là 105 triệu đồng ?

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Tính :

a) $481,92 : 12 - (-20,16)$; b) $3\frac{5}{6}\ \frac{1}{3} + 6\frac{4}{9} : 2$;

c) $3\frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) + 18$; d) $2.3^4 - 3.2^4$;

e) $\left(3\frac{3}{5} - 2\frac{1}{15}\right) . 5$; g) $8\frac{3}{17} \cdot 5\frac{1}{4} + 3\frac{14}{17} \cdot 5\frac{1}{4}$;

h) $\left(1\frac{14}{17} - 1\frac{1}{34}\right) . 34$; i) $3\frac{4}{13} \cdot 15\frac{3}{41} - 3\frac{4}{13} \cdot 2\frac{3}{41}$.

2. Tìm x biết :

a) $\frac{3}{4} + x = -\frac{1}{2}$; b) $-\frac{5}{7} + x = \frac{1}{8}$;

c) $0,253 - x = 1,725$; d) $-3,15 - x = \frac{20}{3}$.

3. Tìm x biết :

a) $0,2x + 7,51 = -4,29$; b) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}(x + 1) = 0$;

c) $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$.

4. Viết biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của 2 :

a) $2^5.2^3$; b) $(16)^4$;

c) $\frac{6^5}{3^5}$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 . 32^2$.

5. Thế nào là giá trị tuyệt đối của một số ? Tìm x biết : $|x| = 3$; $|x| = \frac{1}{7}$; $|x| = 0$; $|x| = -\frac{3}{2}$.

6. Tìm x biết :

a) $|x| + 0,426 = 1$; b) $\frac{9}{4}|x| - \frac{5}{2} = \frac{8}{3}$;

c) $\frac{1}{2}|x| + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$; d) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$.

7. Khai triển tích sau :

$$(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

8. Viết các tổng sau thành tích bằng cách đặt thừa số chung :

a) $ab^4 - 4ab^2$; b) $x^4 + x^3 + x + 1$.

9. Để xác định năng suất lúa vụ mùa của một cánh đồng, người ta cho gặt thử 3 sào lúa tốt trung bình được 710 kg thóc. Hỏi năng suất lúa trung bình của cả cánh đồng là bao nhiêu tính theo tấn/hecta ? (1 hecta = 27 sào).

10. Người ta định làm một con đường trong 10 ngày. Một đội công nhân 42 người làm trong 7 ngày mới được một nửa con đường. Hỏi phải bổ sung bao nhiêu người nữa để có thể hoàn thành công việc đúng thời hạn ? (giả thiết năng suất lao động của mỗi người như nhau).

11. Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hãy suy ra các tỉ lệ thức sau :

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

b) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

c) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$;

d) $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$;

e) $\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}$;

f) $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

Chương III

HÀM SỐ

§1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

1. Ví dụ

Ở lớp 5 ta đã xét nhiều ví dụ về các đại lượng tỉ lệ thuận như : Quãng đường và thời gian của một chuyển động đều ; Số lượng hàng hóa và giá cả ; ... Trong các ví dụ đó ta gặp các đại lượng liên hệ với nhau sao cho đại lượng này tăng (hoặc giảm) bao nhiêu lần thì đại lượng kia cũng tăng (hoặc giảm) bấy nhiêu lần.

Ta xét thêm một ví dụ trong vật lí.

Ví dụ : Sắt có khối lượng riêng là 7,8g/cm^3. Khi đó khối lượng m (tính bằng gam) và thể tích V (tính bằng centimét khối) của sắt liên hệ với nhau bởi công thức

$$m = 7,8\ V.$$

Ta hãy tính một vài giá trị của m theo giá trị của V :

V (cm^3)	1	2	3	4	5	6	7	8
m (g)	7,8	15,6	23,4	31,2	39	46,8	54,6	62,4

Ta cũng thấy nếu V tăng (hoặc giảm) bao nhiêu lần thì m cũng tăng (hoặc giảm) bấy nhiêu lần. Nói cách khác m và V là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

2. Công thức

Ta thấy :

Quãng đường S và thời gian t của một chuyển động đều với vận tốc không đổi v là hai đại lượng tỉ lệ thuận và liên hệ với nhau bởi công thức :

$$S = v.t.$$

Khối lượng m và thể tích V của một vật là hai đại lượng tỉ lệ thuận và liên hệ với nhau bởi công thức

$$m = D.V.$$

Trong đó D là khối lượng riêng của chất cấu tạo nên vật đó.

Tổng quát :

Hai đại lượng tỉ lệ thuận x và y liên hệ với nhau bởi công thức

$$y = a.x$$

Ở đây a là một hằng số khác 0 gọi là *hệ số tỉ lệ.*

Chú ý : Khi có y = ax ta nói *y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a.*

BÀI TẬP

1. Hãy nêu một ví dụ về hai đại lượng tỉ lệ thuận và lập bảng giá trị tương ứng của chúng.

2. Các giá trị của hai đại lượng x và y được cho bằng bảng sau đây :

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	2,5	5	7,5	10	12,5

Hỏi hai đại lượng này có tỉ lệ thuận không ? Nếu có, hệ số tỉ lệ là bao nhiêu ? Viết công thức liên hệ x và y.

3. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

x	-5	-3	0	1	2	3	6
y	-3,5	-2,1	0	0,7	1,4	2,1	4,2

4. Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$). Hỏi x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ bao nhiêu ?

5. Cho biết y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ a, x tỉ lệ thuận với z theo hệ số tỉ lệ b. Hỏi y và z có tỉ lệ thuận không ? Nếu có, hệ số tỉ lệ là bao nhiêu ?

§2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

1. Tỉ số các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận

Giả sử x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có :

$$y = ax.$$

Theo công thức trên, mỗi giá trị của $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$ tương ứng với một giá trị của y : $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$, $y_3 = ax_3$, ... Nhưng ta luôn luôn có :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = a$$

Nghĩa là : *Tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng tỉ lệ thuận luôn luôn không đổi và bằng hệ số tỉ lệ.*

Tính chất này thường được áp dụng để giải các bài toán về tỉ lệ thuận.

2. Bài toán 1

Hai thanh kim loại đồng chất có thể tích tương ứng là $10cm^3$ và $15cm^3$. Hỏi mỗi thanh nặng bao nhiêu gam biết rằng thanh nọ hơn thanh kia 44,5 gam.

Bài giải

Giả sử khối lượng của hai thanh tương ứng là x gam và y gam. Ta có $y - x = 44,5$.

Ta biết khối lượng của một vật tỉ lệ thuận với thể tích của nó, vì vậy ta có :

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15}.$$

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có :

$$\frac{y}{15} = \frac{x}{10} = \frac{y - x}{15 - 10} = \frac{44,5}{5} = 8,9.$$

Vậy : $y = 8,9 \times 15 = 133,5$, $x = 8,9 \times 10 = 89$.

Trả lời : Hai thanh kim loại có khối lượng tương ứng là 89 gam và 133,5 gam.

3. Bài toán 2

91000 tấn xăng được phân phối cho 3 đơn vị vận tải tỉ lệ thuận với số xe của các đơn vị. Hỏi mỗi đơn vị nhận được bao nhiêu tấn xăng, biết số xe tương ứng của các đơn vị là 35,42 và 53 xe.

Bài giải

Gọi số tấn xăng ba đơn vị nhận được tương ứng là x, y, z.

Ta có :

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{42} = \frac{z}{53}$$

và $$x + y + z = 91000.$$

Từ dãy tỉ số bằng nhau trên ta có :

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{42} = \frac{z}{53} = \frac{x + y + z}{35 + 42 + 53} = \frac{91000}{130} = 700.$$

Vậy : $x = 35 \times 700 = 24500$

$y = 42 \times 700 = 29400$

$z = 53 \times 700 = 37100$.

Trả lời : Số xăng ba đơn vị nhận được tương ứng là 24500 tấn, 29400 tấn và 37100 tấn.

Chú ý : Bài toán trên còn được phát biểu đơn giản dưới dạng *chia số 91000 thành 3 phần tỉ lệ thuận với 35, 42 và 53.*

LUYỆN TẬP

1. Hai đơn vị vận tải cùng hợp đồng chuyên chở một khối lượng hàng hóa. Mỗi xe của các đơn vị cùng được điều động chở một số chuyến như nhau và khối lượng chuyên chở mỗi chuyến bằng nhau. Hỏi mỗi đơn vị chuyển được bao nhiêu tấn hàng nếu đơn vị này có 15 xe, còn đơn vị kia có 13 xe và đơn vị này vận chuyển được nhiều hơn đơn vị kia 26 tấn hàng.

2. Ba đơn vị kinh doanh góp vốn theo tỉ lệ 2, 3, 5. Hỏi mỗi đơn vị được chia bao nhiêu tiền lãi nếu tổng số lãi là 350 triệu đồng và tiền lãi được chia tỉ lệ thuận với số vốn đóng góp.

3. Chia một lít cồn thành 3 phần tỉ lệ thuận với 1,2 ; 2,3 và 1,5. Hỏi mỗi phần được bao nhiêu centimét khối cồn ?

4. Hai nền nhà hình chữ nhật, có chiều dài bằng nhau. Nền nhà thứ nhất có chiều rộng 4m, nền nhà thứ hai có chiều rộng 3,5m. Để lát nền nhà thứ nhất người ta dùng 600 viên gạch hoa hình vuông. Hỏi phải dùng bao nhiêu viên gạch hoa cùng loại để lát nền nhà thứ hai ?

5. Khi tổng kết cuối năm học người ta thấy số học sinh giỏi của trường phân bố ở các khối 6, 7, 8, 9 theo tỉ lệ 1,5 ; 1,1 ; 1,3 và 1,2. Hỏi số học sinh giỏi của mỗi khối biết rằng khối 8 nhiều hơn khối 9 là 3 học sinh giỏi.

§3. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

1. Ví dụ

Ở lớp 5 đã xét nhiều ví dụ về các đại lượng tỉ lệ nghịch như : vận tốc và thời gian để đi một quãng đường cố định, số

nhân công và thời gian để hoàn thành một công việc. Trong các ví dụ đó ta gặp các đại lượng liên hệ với nhau sao cho đại lượng này tăng (hoặc giảm) bao nhiêu lần thì đại lượng kia lại giảm (hoặc tăng) bấy nhiêu lần.

Ta xét thêm một ví dụ :

Ví dụ : Thời gian để đi một quãng đường 150km là bao nhiêu nếu đi với vận tốc 30km/h ; 40km/h ; 50km/h ; 60km/h ; 80km/h ; 100km/h.

Kí hiệu v là vận tốc, và t là thời gian tương ứng để đi quãng đường 150km ta có :

$$v.t = 150.$$

Khi cho v lần lượt các giá trị kể trên ta tính được t như sau

v (km/h)	30	40	50	60	80	100
t (h)	5	3,75	3	2,5	1,875	1,5

Ta thấy vận tốc tăng lên bao nhiêu lần thì thời gian giảm đi bấy nhiêu lần. Nói cách khác v và t là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

2. Công thức

Ta thấy trong ví dụ trên sở dĩ v tăng lên bao nhiêu lần thì t giảm đi bấy nhiêu lần vì tích của chúng v.t luôn luôn không đổi : v.t = 150.

Tổng quát :

Hai đại lượng tỉ lệ nghịch y và x liên hệ với nhau bởi công thức :

$$xy = a \quad \text{hay} \quad y = \frac{a}{x}$$

ở đây a là một hằng số khác 0.

BÀI TẬP

1. Hãy nêu một ví dụ về hai đại lượng tỉ lệ nghịch và lập bảng các giá trị của chúng.

2. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Hãy điền số thích hợp vào ô trống của bảng sau :

x	4	5	6	12	15	30	60	120
y	15	12	10	5	4	2	1	0,5

3. Theo bảng giá trị dưới đây x và y có phải là hai đại lượng tỉ lệ nghịch không ?

x	4	8	16	31	32
y	496	248	126	64	62

4. Xác định mối tương quan giữa hai cạnh của các hình chữ nhật có cùng một diện tích S. Điền các giá trị tương ứng của các cạnh x, y (tính bằng mét) trong bảng dưới đây, với giả thiết $S = 210m^2$.

x	3		5		10		15	
y		2		7		6		30

5. Cho 3 đại lượng x, y, z. Hãy tìm hiểu mối tương quan giữa các đại lượng x và z biết rằng :

a) x và y tỉ lệ nghịch, y và z cũng tỉ lệ nghịch ;

b) x và y tỉ lệ nghịch, y và z tỉ lệ thuận ;

c) x và y tỉ lệ thuận, y và z tỉ lệ nghịch.

§4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

1. Tỉ số các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch

Giả sử x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có :

$$yx = a \text{ hay } y = \frac{a}{x}.$$

Theo các công thức trên, mỗi giá trị của $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$ tương ứng với một giá trị của $y = y_1, y_2, y_3, \ldots$ sao cho:

$$y_1x_1 = a \; ; \; y_2x_2 = a \; ; \; y_3x_3 = a \; ; \ldots$$

hay $$y_1 = \frac{a}{x_1} \; ; \; y_2 = \frac{a}{x_2} \; ; \; y_3 = \frac{a}{x_3} \; ; \; \ldots$$

Từ đó ta có :

$$y_1x_1 = y_2x_2 = y_3x_3 = \ldots = a.$$

hay $$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} \; ; \; \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1} \; ; \; \frac{y_2}{y_3} = \frac{x_3}{x_2} \; ; \ldots$$

Nghĩa là :

a) Tích một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia là một hằng số.

b) Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số nghịch đảo của hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Các tính chất này thường được áp dụng trong các bài toán về tỉ lệ nghịch.

2. Bài toán 1

Hai vận động viên cùng đua xe đạp trên một quãng đường. Vận động viên thắng cuộc về đích sau 6,25 giờ, vận động viên kia về đích chậm hơn 1 phút rưỡi. Hỏi vận tốc trung bình của mỗi vận động viên, biết rằng trung bình người thắng cuộc phóng nhanh hơn người kia 0,2km trong một giờ. (Cho biết 1,5 phút = 0,025 giờ).

Bài giải

Gọi vận tốc trung bình của người thắng cuộc là v_1 km/h, và của người thứ hai là $v_2$km/h. Ta có $v_1 - v_2 = 0,2$. thời gian về đích của người thắng cuộc là $t_1 = 6,25$ giờ , nếu gọi thời gian về đích của người thứ hai là t_2 giờ thì ta có $t_2 - t_1 = 0,025$. Vì vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên ta có :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

Từ đó, theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra :

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2} = \frac{t_2 - t_1}{t_1}$$

Thay số vào ta được :

$$\frac{0,2}{v_2} = \frac{0,025}{6,25}$$

hay $$v_2 = \frac{0,2 \times 6,25}{0,025} = 50.$$

Trả lời vận tốc trung bình của người thứ hai là 50km/h còn vận tốc trung bình của người thắng cuộc là 50,2 km/h.

3. Bài toán 2

Bốn đội máy cày gồm 36 máy làm việc trên bốn cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày, đội thứ ba trong 10 ngày, đội thứ tư trong 12 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy. (Giả thiết năng suất của các máy bằng nhau).

Bài giải

Gọi số máy cày của 4 đội lần lượt là x, y, z, t.

Ta có $x + y + z + t = 36$.

Vì số máy tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc nên ta có :

$$4x = 6y = 10z = 12t.$$

Hay

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}}$$

Theo tính chất của dãy các tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{t}{\frac{1}{12}} = \frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}} = \frac{36}{\frac{36}{60}} = 60.$$

Vậy : $x = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15$

$y = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$

$z = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6$

$t = \frac{1}{12} \cdot 60 = 5.$

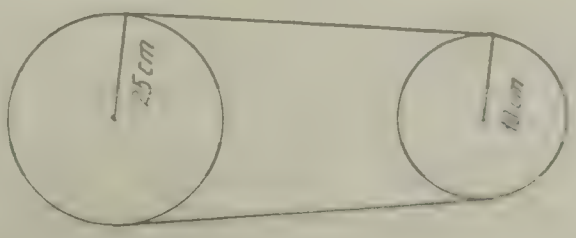
Trả lời : Số máy của các đội lần lượt là 15, 10, 6, 5 máy.

Chú ý : Bài toán trên còn được phát biểu đơn giản dưới dạng : *chia số 36 thành 4 phần tỉ lệ nghịch với 4, 6, 10, 12.*

Qua cách giải trên ta thấy bài toán trở thành *chia số 36 thành 4 phần tỉ lệ thuận với* $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$.

LUYỆN TẬP

1. Hai vòng quay nối với nhau bởi một dây tời (hình bên). Vòng quay lớn có bán kính 25cm, vòng quay nhỏ bán kính 10cm, vận tốc vòng quay lớn là 400 vòng/ phút.



Hỏi vận tốc vòng quay nhỏ ?

2. Với cùng số tiền để mua 5100 mét vải loại 1 có thể mua được bao nhiêu mét vải loại 2, biết rằng giá tiền vải loại 2 chỉ bằng 85% giá tiền vải loại 1.

3. Ba đội máy san đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày và đội thứ ba trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy, biết rằng đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ hai 2 máy và năng suất các máy như nhau.

4. Với thời gian để một thợ lành nghề làm được 11 sản phẩm thì người thợ học việc chỉ làm được 7 sản phẩm. Hỏi người thợ học việc phải dùng bao nhiêu thời gian để hoàn thành một khối lượng công việc mà người thợ lành nghề làm trong 56 giờ.

5. Một vật chuyển động trên các cạnh của một hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, và trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài của cạnh hình vuông biết rằng tổng số thời gian vật chuyển động trên 4 cạnh là 59 giây.

§5. HÀM SỐ

1. Ví dụ

1) Ví dụ 1 : Hai đại lượng tỉ lệ thuận liên hệ với nhau bởi công thức :

$$y = 1{,}25.x. \qquad (1)$$

Giả sử x nhận các giá trị : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Khi đó với mỗi x thuộc tập hợp số X = {1, 2, 3, 4, 5} công thức trên cho phép ta tính được một giá trị duy nhất của y :

x	1	2	3	4	5
y	1,25	2,5	3,75	5	6,25

(2)

Ta nói rằng đa xác định một *hàm số* y từ tập hợp X đến Q. Hàm số này được cho bởi công thức (1) hoặc bảng (2).

2) Ví dụ 2 : Hai đại lượng tỉ lệ nghịch liên hệ với nhau bởi công thức :

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Giả sử x nhận các giá trị : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Khi đó với mỗi x thuộc tập hợp số :

$$X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, 2, 3, 4\right\}$$

công thức trên cho phép ta tính được một giá trị duy nhất của y :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
y	2	3	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

(4)

Ta nói rằng đã xác định một hàm số y từ tập hợp X đến Q. Hàm số này được cho bởi công thức (3) hoặc bảng (4).

Nhận xét : Các công thức (1), (3) hoặc các bảng (2), (4) cho ta một *quy tắc* thiết lập *sự tương ứng* mỗi giá trị $x \in X$ với một giá trị duy nhất $y \in Q$.

3) Ví dụ 3. Sự tương ứng giữa x và y được cho theo quy tắc sau : Mỗi giá trị bất kì $x \in Q$ đều tương ứng với một giá trị duy nhất y = 2. Ta có hàm số :

$$y = 2.$$

2. Định nghĩa. Giả sử X và Y là hai tập hợp số.

Một hàm số f từ X đến Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ một và chỉ một giá trị $y \in Y$, mà ta kí hiệu là $y = f(x)$. Người ta viết :

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x). \text{ (đọc là } x \text{ tương ứng với } f(x))$$

Ghi nhớ :

- X gọi là *tập xác định* của hàm số.
- x gọi là *biến*. Biến x nhận giá trị tùy ý thuộc X.
- Giá trị $y = f(x)$ gọi là *giá trị của hàm số f tại x*.

BÀI TẬP

1. Giả sử X {−5 ; −4 ; −3 ; −2 ; −1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}

Hàm số f : X → Q được cho bởi bảng sau :

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	15	12	9	6	3	0	−3	−6	−9	−12	−15

a) Tìm các giá trị của hàm số f tại x = −3, x = 0, x = 5 (Nói cách khác tính f(−3), f(0), f(5)).

b) Hàm số f có thể cho bởi công thức nào ?

2. Giả sử X = $\{-5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\}$.

Hàm số f : X → Q cho bởi công thức :

$$y = \frac{15}{x}$$

Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số f vào bảng sau

x	−5	−4	−3	−2	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
y = f(x)									

3. cho hàm số f : Q → Q xác định bởi công thức :

$$y = 2x^2 - 1.$$

Hãy tính f $(-\frac{1}{2})$, f(0), f(3).

4. Một chiếc máy bay sau khi cất cánh và đạt độ cao 10.000m đã bay liền trong 4 giờ với vận tốc không đổi 800km/h và giữ nguyên độ cao ban đầu.

a) Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc giữa quãng đường S máy bay bay được (tính bằng km) và thời gian t (tính bằng giờ) trong 4 giờ bay kể trên.

b) Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc giữa độ cao h của máy bay (tính bằng km) và thời gian t (tính bằng giờ) trong ô tô bay kể trên.

5. Cho hàm số (hàm giá trị tuyệt đối):

$$|\ |\ : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$$
$$x \mapsto |x|.$$

Tìm giá trị của hàm số tại $x = -1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{7}\ ;\ 3$.

6. Các quy tắc sau có xác định một hàm số từ $\mathbf{Q}$ đến $\mathbf{Q}$ không ?

a) Cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với số đối của nó.

b) Cho tương ứng mỗi số hữu tỉ x với nghịch đảo của nó ?

§6. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Cặp số hữu tỉ

Hai số hữu tỉ sắp theo một thứ tự nhất định lập thành một cặp số

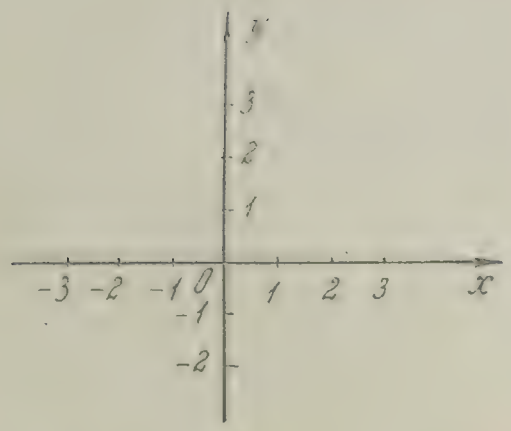
Ví dụ : $(-1\ ;\ \frac{1}{3})$, $(0\ ;\ 2)$, $(0{,}5\ ;\ -3)$, $(0\ ;\ 0)$ là những cặp số.

Chú ý : Từ hai số khác nhau lập được hai cặp số khác nhau. Chẳng hạn, với hai số -3, 5 ta có hai cặp số là $(-3\ ;\ 5)$ và $(5\ ;\ -3)$.

Nếu $a \neq b$, thì $(a\ ;\ b) \neq (b\ ;\ a)$

2. Mặt phẳng tọa độ

Các số hữu tỉ được biểu diễn bởi những điểm trên trục số. Các cặp số hữu tỉ được biểu diễn bởi những điểm trên *mặt phẳng tọa độ*.



Mặt phẳng tọa độ xác định bởi hai trục số vuông góc với nhau (xem hình bên).

Trục nằm ngang Ox gọi là *trục hoành*.

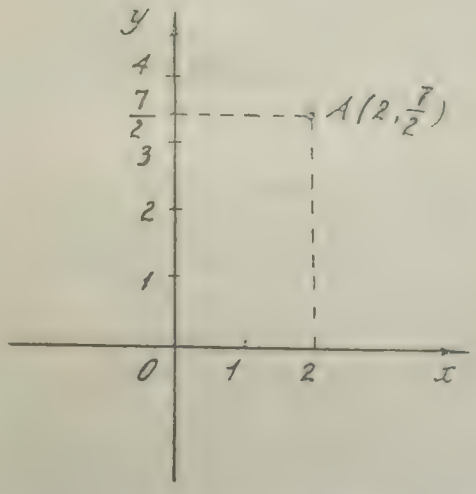
Trục thẳng đứng Oy gọi là *trục tung*.

Giao điểm O biểu diễn số 0 của cả hai trục gọi là *gốc tọa độ*

Mặt phẳng tọa độ Oxy cũng còn gọi là *hệ tọa độ Oxy*.

3. Biểu diễn cặp số hữu tỉ trên mặt phẳng tọa độ

Ví dụ : Biểu diễn cặp số $\left(2\ ;\ \frac{7}{2}\right)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.



Từ điểm 2 trên trục hoành ta kẻ một đường thẳng song song với trục tung và từ điểm $\frac{7}{2}$ trên trục tung ta kẻ một đường thẳng song song với trục hoành. Hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm A (xem hình bên). Điểm A là điểm biểu diễn cặp số $\left(2\ ;\ \frac{7}{2}\right)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy, và thường kí hiệu là $A\left(2\ ;\ \frac{7}{2}\right)$.

Cặp số $\left(2\ ;\ \frac{7}{2}\right)$ gọi là *tọa độ* của điểm A.

Số 2 gọi là *hoành độ*, $\frac{7}{2}$ gọi là *tung độ* của A.

Tổng quát :

Mỗi cặp số (a ; b) được biểu diễn bởi một điểm duy nhất M (a ; b) trên mặt phẳng tọa độ. Cặp số (a ; b) gọi là tọa độ của điểm M, a là hoành độ, b là tung độ của điểm M.

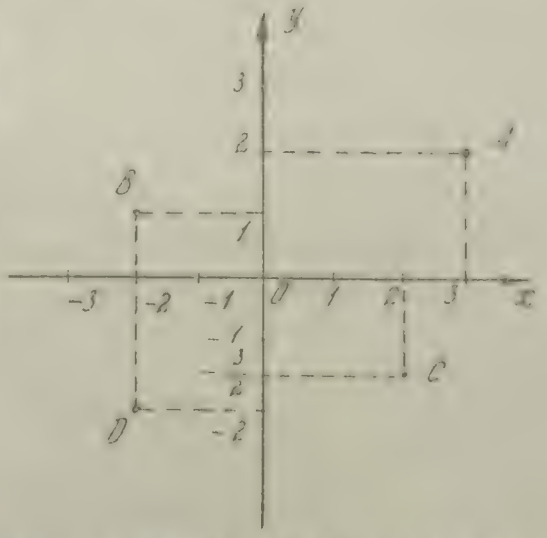
BÀI TẬP

1. Viết tất cả các cặp số được lập nên từ các số hữu tỉ sau : $-\frac{3}{2}$; 1 ; 0 ; $\frac{1}{5}$.

2. Vẽ một hệ tọa độ Oxy và biểu diễn các cặp số sau trên hệ tọa độ đó : (1 ; 2) ; $\left(-3 ; -\frac{1}{2}\right)$; (4 ; 0).

3. Biểu diễn trên hệ tọa độ Oxy các điểm có tọa độ là (−2 ; 1) ; $\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$.

4. Hãy viết tọa độ của các điểm A, B, C, D ở hình bên.



5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy hãy tìm tất cả các điểm :

a) Có hoành độ bằng 3 ;

b) Có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$.

6. a) Những điểm trên trục hoành có tung độ bằng bao nhiêu ?

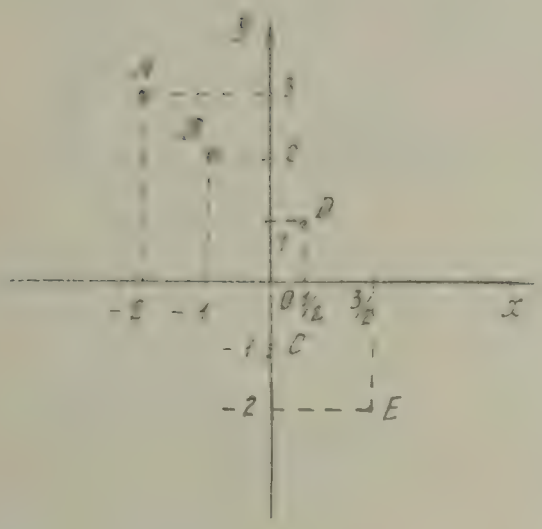
b) Những điểm trên trục tung có hoành độ bằng bao nhiêu ?

§7. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. Ví dụ

Cho tập $X = \left\{-2 ; -1 ; 0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$ và $f : X \to \mathbb{Q}$ là một hàm số được cho bằng bảng sau

x	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
f(x)	3	2	-1	1	-2



Nhờ bảng trên ta có thể viết tất cả các cặp số (x ; f(x)) đó là : (−2 ; 3), (−1 ; 2), (0 ; −1), $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$, $\left(\frac{3}{2} ; -2\right)$.

Biểu diễn các cặp số này trên một mặt phẳng tọa độ Oxy ta được các điểm A, B, C, D, E.

Tập hợp các điểm A, B, C, D, E gọi là *đồ thị của hàm số f*.

2. Định nghĩa

Đồ thị của hàm số $f : X \to Y$ là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ $(x ; f(x))$ với $x \in X$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Biểu diễn các điểm của đồ thị trên một mặt phẳng tọa độ gọi là *vẽ đồ thị*.

BÀI TẬP

1. Cho $X = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$. Hàm số $f : X \to \mathbf{Q}$ xác định bởi bảng sau :

x	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	3

a) Hãy liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp :

$$G = \{(x ; f(x)),\ x \in X\}$$

b) Vẽ đồ thị hàm số f.

2. Cho $X = \left\{-1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2} , 1\right\}$. Hàm số $f : X \to Q$ xác định bởi công thức $y = -x$. Hãy :

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp :

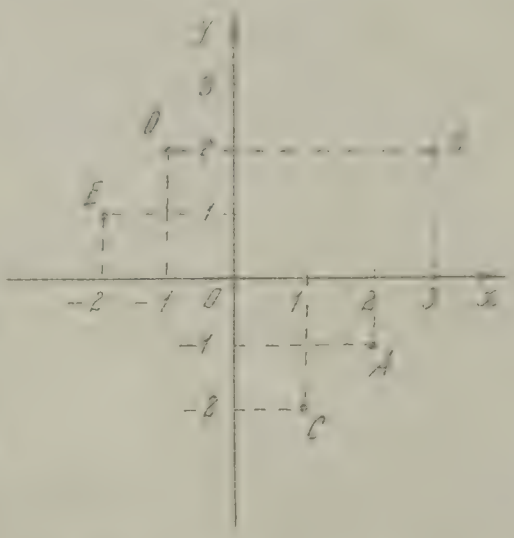
$G = \{ (x ; f(x)),\ x \in X \}$

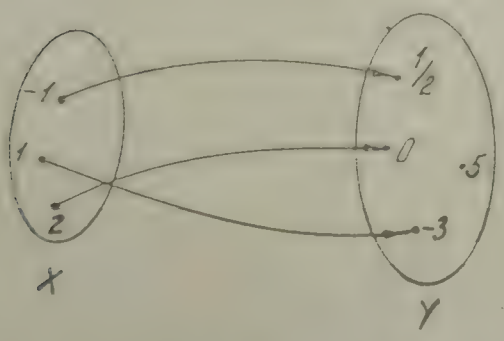
b) Vẽ đồ thị hàm số f.

3. Cho biết hàm số f có đồ thị là các điểm A, B, C, D, E, O (xem hình bên). Hãy :

a) Tìm tập xác định X của hàm f.

b) Lập bảng các giá trị của f.





4. Sự tương ứng giữa các phần tử của X và Y được cho bởi các mũi tên (xem hình bên)

a) Tương ứng trên có xác định một hàm số từ X đến Y không ? Giải thích tại sao ?

b) Nếu có hãy vẽ đồ thị hàm số đó.

5. Giả sử hàm số $f : Q \to Q$ xác định bởi công thức $y = 5x - \frac{1}{2}$. Hỏi các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số không ?

a) $A\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$;

b) B (1 ; 4,5) ;

c) C (−1 ; −6) ;

d) $D\left(-\frac{1}{2} ; -3\right)$.

LUYỆN TẬP

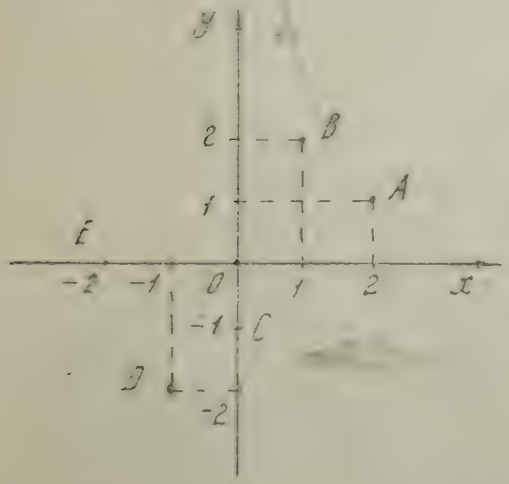
1. Cho X = {−1, 0, 1}; Y = $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Hàm số f : X → Y được xác định như sau :

$$f(-1) = \frac{1}{2},\ f(0) = -\frac{1}{2},\ f(1) = -\frac{1}{2}$$

a) Lập bảng giá trị của f ;

b) Vẽ đồ thị của f.

2. Cho X = {−1, 0, 1}, Y = $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.



a) Hãy cho một ví dụ về một hàm số từ X đến Y.

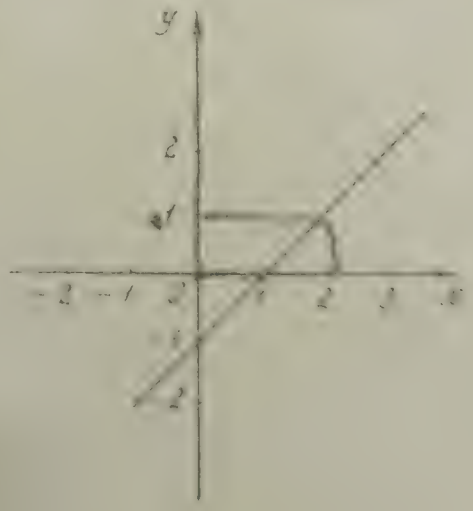
b) Có bao nhiêu hàm số từ X đến Y ?

3. Cho hàm số f có đồ thị là các điểm A, B, C, D, E. Hãy :

a) Tìm tập xác định của f.

b) Tính f(−2), f(0), f(1).

4. Cho hàm số f : **Q** → **Q** có đồ thị là những điểm nằm trên đường thẳng AB (Hình bên). Hãy tìm f(0), f(1), f(2).



5. Nếu hàm số f xác định với công thức $y = \frac{3}{x}$ thì số 0 có thuộc tập xác định của f không ? Tại sao ?

§8. ĐỒ THỊ HÀM SỐ Y = aX

Trong mục này ta xét hàm số :

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$x \mapsto y = ax.$$

Ở đây a là một số hữu tỉ khác 0.

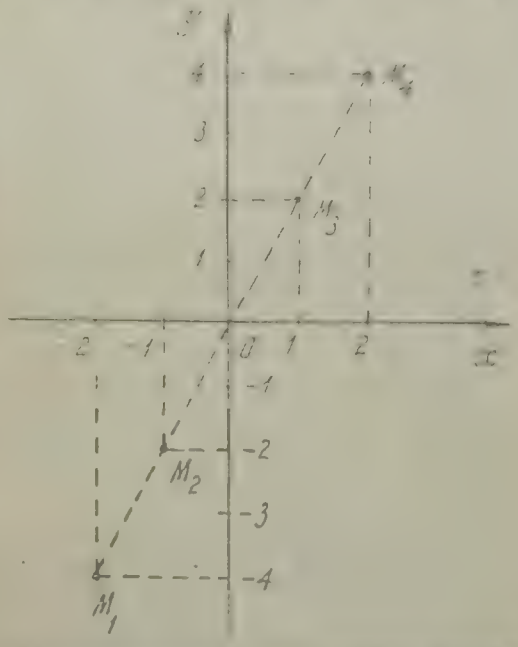
Để cho gọn hàm số này được viết đơn giản là y = ax.

1. Đồ thị của hàm số y = ax

a) Ví dụ : Xét hàm số y = 2x.

Tập xác định của hàm số là toàn bộ các số hữu tỉ Q, vì thế không thể liệt kê hết được các cặp số (x ; f(x)). Ta lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm :

x	-2	-1	0	1	2
y = 2x	-4	-2	0	2	4



Vậy các điểm (-2 ; -4), (-1 ; -2), (0 ; 0), (1 ; 2), (2 ; 4) thuộc đồ thị hàm số. Biểu diễn các điểm này trên mặt phẳng tọa độ. Ta được các điểm M_1, M_2, O, M_3, M_4. Nhận xét rằng các điểm này nằm trên cùng một đường thẳng

b) Tổng quát

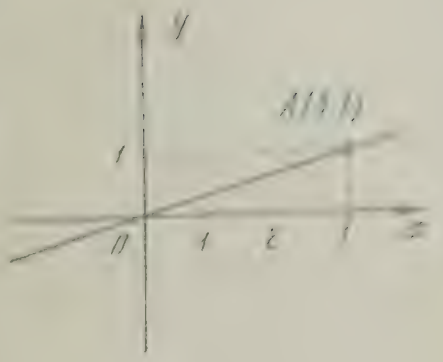
> *Đồ thị hàm số y = ax là tập hợp những điểm nằm trên một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.*

2. Vẽ đường thẳng chứa đồ thị của hàm số y = ax

Ví dụ : Vẽ đường thẳng chứa đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x$. Ta biết đường thẳng này đi qua gốc tọa độ O. Vì vậy ta chỉ cần xác định

thêm một điểm nằm trên đồ thị khác O. Chẳng hạn, cho x = 3 được y = 1. Vậy điểm A(3 ; 1) thuộc đồ thị.

Nối A với O ta được đường thẳng chứa đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x$.



BÀI TẬP

1. Vẽ trên cùng một hệ tọa độ Oxy các đường thẳng chứa đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = \frac{1}{2}x$.

2. Vẽ trên cùng một hệ tọa độ Oxy các đường thẳng chứa đồ thị của các hàm số sau :

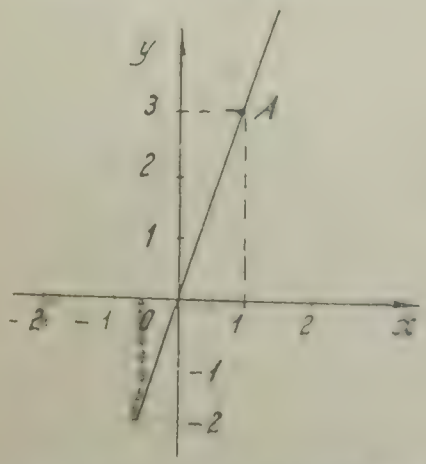
a) $y = -x$; b) $y = -2x$; c) $y = -\frac{1}{2}x$.

3. Cho biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là những điểm nằm trên đường thẳng OA.

a) Tìm điểm trên đồ thị có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

b) Tìm điểm trên đồ thị có tung độ bằng -2.

c) Viết công thức xác định hàm số.



4. Cho hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$), x_1, x_2, x_3 là những số hữu tỉ khác 0. Giả sử y_1, y_2, y_3 là các giá trị của hàm số tương ứng tại $x = x_1$, x_2, x_3. Chứng minh:

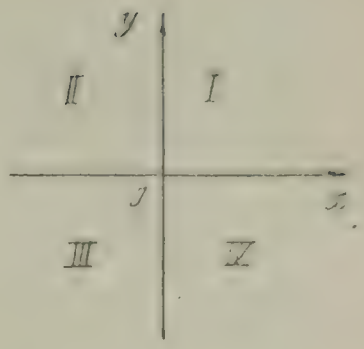
a) $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$;

b) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{x_3}{x_1} = \frac{y_3}{y_1}$, $\frac{x_3}{x_2} = \frac{y_3}{y_2}$.

5. Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở góc phần tư nào của hệ tọa độ Oxy nếu :

a) $a > 0$;

b) $a < 0$.



§9. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = \frac{a}{X}$

Trong tiết này ta xét hàm số :

$$f : Q^* \to Q$$

$$x \mapsto y = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0$$

Q^* là tập hợp các số hữu tỉ khác 0. Hàm số này còn kí hiệu đơn giản là $y = \frac{a}{x}$.

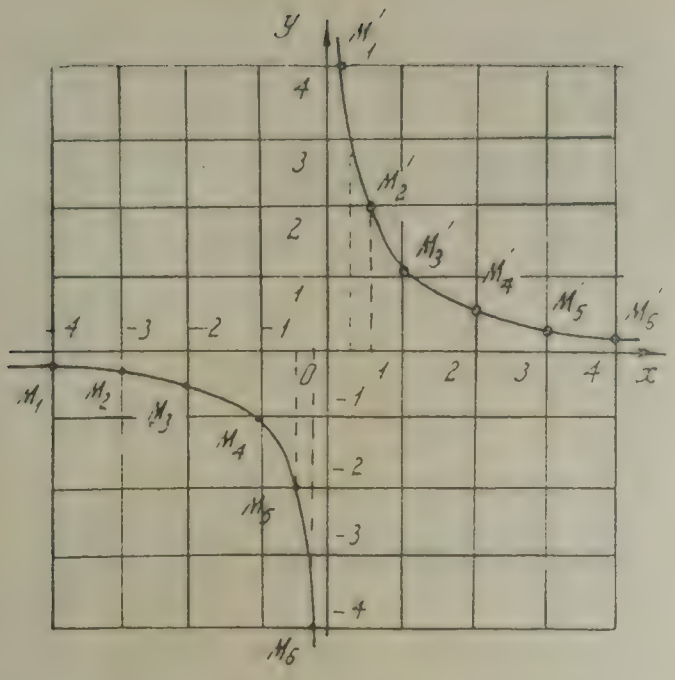
Ta xét đồ thị của hàm số này qua hai ví dụ.

1. Ví dụ 1

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$. Ta lập bảng giá trị của hàm số ứng với một số giá trị của biến x.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Biểu diễn các điểm $M_1\left(-4 ; -\frac{1}{4}\right)$, $M_2\left(-3 ; -\frac{1}{3}\right)$, $M_3\left(-2 ; -\frac{1}{2}\right)$, $M_4(-1 ; -1)$, $M_5\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$, $M_6\left(-\frac{1}{4} ; -4\right)$ và các



điểm $M'_1\left(\frac{1}{4}\,;\,4\right)$, $M'_2\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$, $M'_3(1\;;\;1)$; $M'_4\left(2\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $M'_5\left(3\,;\,\frac{1}{3}\right)$, $M'_6\left(4\,;\,\frac{1}{4}\right)$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy nếu cho x nhận thêm nhiều giá trị nữa, ta thấy các điểm của đồ thị nằm trên hai đường cong như hình vẽ.

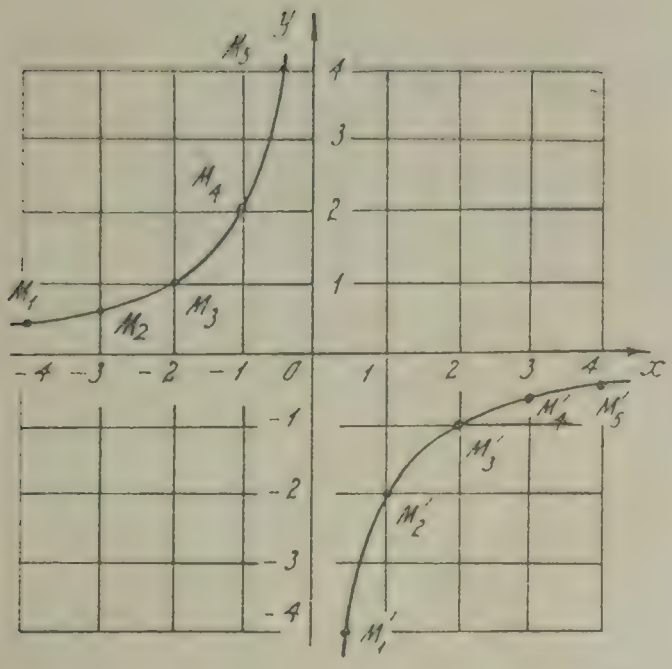
2. Ví dụ 2.

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-2}{x}$.

Ta lập bảng các giá trị của hàm số ứng với một số giá trị của x.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Biểu diễn các điểm $M_1\left(-4\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-3\,;\,\frac{2}{3}\right)$, $M_3(-2\;;\;1)$, $M_4(-1\;;\;2)$, $M_5\left(-\frac{1}{2}\,;\,4\right)$ và $M'_1\left(\frac{1}{2}\,;\,-4\right)$, $M'_2(1\;;\;-2)$, $M'_3(2\;;\;-1)$,



$M'_4\left(3\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$, $M'_5\left(4\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Nếu cho x nhận thêm nhiều giá trị nữa, ta thấy các điểm của đồ thị nằm trên hai đường cong như hình vẽ.

BÀI TẬP

1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-1}{x}$, sau khi biểu diễn trên hệ tọa độ Oxy các điểm của đồ thị tương ứng với các giá trị $x = -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4.$

2. Cũng làm như bài 1 đối với hàm số $y = \frac{2}{x}$.

3. Không vẽ đồ thị hãy xác định xem các điểm sau có nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{15}{x}$ không ?

a) Điểm M_1 (−5 ; 3) ;

b) Điểm M_2 (−3 ; −5) ;

c) Điểm M_3 (0,25 ; 60).

4. Cho hàm số $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$; Giả sử y_1, y_2 là hai giá trị của hàm số tương ứng với các giá trị x_1, x_2 của biến x. Chứng minh rằng :

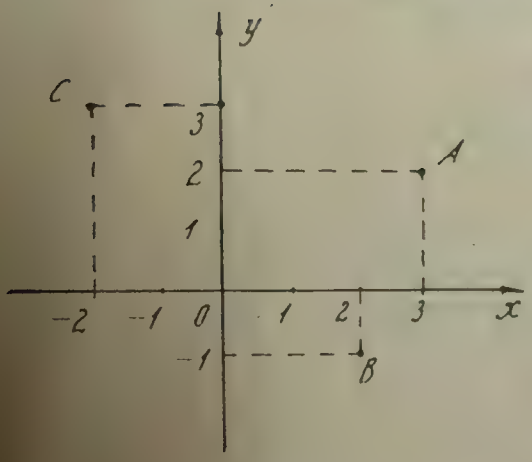
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

5. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2x}$. Tìm trên đồ thị những điểm :

a) Có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$;

b) Có tung độ bằng −2.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III



1. a) Đọc tọa độ các điểm A, B, C trong hệ tọa độ Oxy ở hình vẽ bên.

b) Biểu diễn các cặp số sau trong hệ tọa độ Oxy : (−1 ; −2,5) (1,5 ; 3), (2 ; −2), (−3 ; 1).

2. Trong hệ tọa độ Oxy các điểm sau đây nằm trên đường nào ?

a) Các điểm có hoành độ bằng 0,5 ?

b) Các điểm có tung độ bằng −1,5 ?

c) Các điểm có hoành độ bằng tung độ ?

3. Cho hàm số $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ xác định bởi công thức $y = 2x^2 + 1$. Hỏi các điểm sau đây có nằm trên đồ thị của hàm số không :

a) A $\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$; b) B $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$;

c) C(−3 ; 21).

4. Cho hàm số f : **Q** → **Q** xác định bởi công thức $y = 2x - 1$ và A là một điểm nằm trên đồ thị của hàm số.

a) Nếu A có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$ thì tung độ của nó là bao nhiêu ?

b) Nếu A có tung độ bằng −7 thì hoành độ của nó là bao nhiêu ?

5. Cho X = {1, 2, 3, 4, 5 } và hàm số f : X → X xác định bằng bảng sau :

x	1	2	3	4	5
f(x)	3	2	4	5	1

Hãy vẽ đồ thị của hàm số f.

6. Với X là tập hợp đã cho trong bài 5, cho hàm số f : X → X xác định bằng bảng sau :

x	1	2	3	4	5
f(x)	1	2	3	4	5

Hàm số f có thể cho bởi công thức nào ? Vẽ đồ thị của f

7. Cho X = {−2 ; −0,5 ; 0 ; 1,5 ; 2 ; 3 ; 5}.

Y = {−1,6 ; −0,4 ; 0 ; 1,2 ; 1,6 ; 2,4 ; 4}

và hàm số f : X → Y

$$x \longmapsto y = f(x)$$

xác định bởi bảng sau :

x	−2	−0,5	0	1,5	2	3	5
y	−1,6	−0,4	0	1,2	1,6	2,4	4

Hàm số f có thể cho bởi công thức nào ? Vẽ đồ thị của f Các đại lượng x, y có tỉ lệ thuận không ?

8. Cho $X = \{0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 4\}$

$Y = \{0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,8 ; 2 ; 4\}$

và hàm số $f : X \to Y$

$x \mapsto y = f(x)$

xác định bởi bảng sau :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	4
y	4	2	0,8	0,4	0,2	0,1

Hàm số f có thể cho bởi biểu thức nào ? Các đại lượng x và y có tỉ lệ nghịch không ?

9. Hai bức tường hình chữ nhật có cùng chiều dài, còn chiều cao tương ứng là 3,2m và 2,8m. Để quét vôi bức tường thứ nhất người ta phải dùng 0,8kg vôi ve. Hỏi phải dùng bao nhiêu kg vôi ve để quét vôi bức tường thứ hai sao cho hai bức tường được quét vôi như nhau ?

10. Muốn làm một công việc của Hợp tác xã phải cần 75 người làm trong 15 ngày, mỗi ngày làm việc 8 giờ. Nếu dùng hai máy, mỗi ngày làm việc 12 giờ thì phải bao lâu mới làm xong, biết rằng năng suất của máy bằng 93,75 năng suất của người.

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. BIỂU THỨC CHỨA CHỮ

1. Ví dụ

Trong toán học, vật lí, ... ta thường gặp những biểu thức bao gồm những phép toán (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) không chỉ trên những số mà còn cả trên những chữ. Những biểu thức như vậy gọi là *biểu thức đại số.*

Ví dụ :

1) Chu vi và diện tích của một hình vuông cạnh a cho ta các biểu thức 4a và a^2.

2) Chu vi và diện tích hình chữ nhật có chiều dài a, chiều rộng b cho ta các biểu thức 2(a + b) và ab.

3) Công thức tính quãng đường đi được của một vật chuyển động đều với vận tốc v = 250km/h trong thời gian t giờ cho ta biểu thức đại số v.t.

4) $ax^2 + bx + c$, $\frac{3}{x}$; $\frac{y(x^2-2)}{xy+y}$ là những biểu thức đại số.

2. Hằng số và biến số

Một biểu thức đại số có thể chứa hai loại chữ :

1) Những chữ đại diện cho một số tùy ý của một tập hợp số nào đó gọi là những *biến số* hay còn gọi tắt là biến. Chẳng hạn, trong các ví dụ 1, 2, 3 các chữ a, b, t đại diện cho một số hữu tỉ dương tùy ý. Đó là những biến.

2) Những chữ đại diện cho một số xác định gọi là *những hằng số* hay còn gọi tắt là hằng. Chẳng hạn, trong ví dụ 3, v là một hằng.

Trong một biểu thức đại số chứa nhiều chữ, người ta thường chỉ rõ đâu là biến, đâu là hằng. Chẳng hạn, khi viết biểu thức $ax^2 + bx + c$ người ta thường coi x là biến, còn a, b, c là những hằng.

3. Biểu thức nguyên, biểu thức phân

Một biểu thức đại số không chứa biến ở mẫu gọi là biểu thức nguyên.

Một biểu thức đại số chứa biến ở mẫu gọi là biểu thức phân.

Các biểu thức 4a, a^2, 2(a + b), ab, vt, $ax^2 + bx + c$ là những biểu thức nguyên.

Các biểu thức $\frac{3}{x}$; $\frac{y(x^2 - 2)}{xy + y}$ là những biểu thức phân.

4. Nguồn gốc chữ đại số

Việc các nhà toán học lấy các chữ a, b, c, x, y, z... đại diện cho những số chỉ mới bắt đầu ở thế kỉ 17, đánh dấu một bước trừu tượng hóa trong toán học. Cho nên các nhà toán học Việt Nam khi dịch danh từ Algebrathành Đại số có ý muốn nói đó là môn học mà người ta lấy chữ đại diện cho số, chú ý chữ "đại" trong danh từ đại số có nghĩa là đại diện. Chữ Algebra là một phần tên cuốn sách đưa ra các quy tắc tính toán và giải phương trình của một nhà toán học Ả Rập. Còn chữ Algorithm mà ta dịch là thuật toán chính là tên của nhà toán học đó (ông sinh năm 783 và mất năm 850).

BÀI TẬP

1. Viết các biểu thức đại số để tính :

a) Khối lượng của một vật có thể tích V và khối lượng riêng D.

b) Diện tích hình bình hành có cạnh đáy a và đường cao h.

c) Diện tích hình thang có đáy nhỏ là a, đáy lớn là b, và đường cao h.

2. Viết các biểu thức đại số sau :

a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng.

b) Tổng của hai lần bình phương số a và số b.

c) Bình phương của tổng hai số a và b.

d) Tổng các bình phương của hai số a và b.

3. Giải bài toán sau : tính khối lượng của một vật thể hình lập phương cạnh là acm làm bằng một chất có khối lượng riêng là Dg/cm^3.

Cho a và D một giá trị cụ thể và tính kết quả.

4. Trong các biểu thức đại số sau, đâu là biểu thức nguyên, đâu là biểu thức phân.

a) $2x(y^3 - 2) + x^2 - y^2$; b) $\dfrac{4(x+2)(y^2-4)}{x+2}$;

c) $x(y-1) + \dfrac{3x+y^2}{2y}$; d) $\dfrac{5x(7y+3)}{15}$;

e) $\dfrac{2x^2+3x-2}{5a-3}$ ở đây x là biến, a là hằng.

5. Cho biểu thức đại số $\dfrac{y(x^2-1)}{xy+y}$. Hãy thay x = 4 y = 11 rồi tính kết quả.

§2. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. Giá trị của một biểu thức đại số

1) Ví dụ : Xét biểu thức đại số $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$. Khi thay x trong biểu thức này bằng một số cụ thể, chẳng hạn x = 2, ta nhận được một biểu thức số : $2^2 - 2 + \dfrac{1}{4}$.

Thực hiện các phép tính trong biểu thức số này ta được :

$$2^2 - 2 + \frac{1}{4} = 4 - 2 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} .$$

$\frac{9}{4}$ *gọi là giá trị của biểu thức* $x^2 - x + \frac{1}{4}$ *tại* $x = 2$.

2) Ví dụ 2 : Xét biểu thức đại số :

$$2x + \frac{3}{4} - \frac{y(x^2 - 2)}{xy + y} .$$

Thay x = 0, y = 1 vào biểu thức trên ta được biểu thức số :

$$2 . 0 + \frac{3}{4} - \frac{1(0^2 - 2)}{0 . 1 + 1}$$

Thực hiện các phép tính ta được kết quả là $\frac{11}{4}$.

$\frac{11}{4}$ *gọi là giá trị của biểu thức* $2x + \frac{3}{4} - \frac{y(x^2 - 2)}{xy + y}$ *tại* $x = 0$ *và* $y = 1$.

Vậy :

Khi thay các biến trong một biểu thức đại số bằng những số đã cho, ta được một biểu thức số. Kết quả nhận được khi thực hiện các phép tính trong biểu thức số đó gọi là giá trị của biểu thức đại số tại các giá trị cho trước của các biến.

2. Giá trị thích hợp của biến

1) Ví dụ : Xét biểu thức $3x + 2 - \frac{1}{x - 1}$.

• Thay x = 2 ta được $3 . 2 + 2 - \frac{1}{2 - 1} = 7$. Vậy 7 là giá trị của biểu thức tại x = 2. Ta nói 2 là một *giá trị thích hợp của x hay biểu thức xác định tại* $x = 2$.

• Thay x = 1 ta được biểu thức $3 . 1 + 2 - \frac{1}{1 - 1}$ không xác định vì phép chia cho 0 không thực hiện được. Ta nói $x = 1$ *là giá trị không thích hợp của biến x* hay *biểu thức trên không xác định tại* $x = 1$.

2) Nhận xét :

Một biểu thức nguyên xác định tại mọi giá trị của biến.

Một biểu thức phân không xác định tại những giá trị của biến làm cho mẫu bằng 0.

BÀI TẬP

1. Tính giá trị của biểu thức $3x^2 - 2.\frac{x-1}{4} + 3$ tại $x = -2$.

2. Tính giá trị của biểu thức $\frac{4xy - y^2}{x^2y + x^2}$ tại :

a) $x = -1$, $y = 5$;

b) $x = 1020$, $y = 0$.

3. Tính giá trị của biểu thức $ax^2 - (a + 1)x + 5$ tại $x = 2$ (a là một hằng).

4. Tìm các giá trị không thích hợp của x trong các biểu thức sau :

a) $3x^2 + 1 - \frac{2x+1}{1-3x}$; b) $\frac{15(x^2-1)}{x+1}$.

5. Tìm các giá trị không thích hợp của x và y trong các biểu thức sau :

a) $\frac{3x^2y - 1}{(x+1)(y-2)}$; b) $\frac{1}{x + xy}$.

§3. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ BẰNG NHAU

1. Biểu thức nguyên bằng nhau

1) Ví dụ : Xét hai biểu thức $(x + 1)^2$ và $x^2 + 2x + 1$. Ta thấy tại bất kì giá trị nào của x hai biểu thức đều nhận giá trị bằng nhau. Thật vậy, tại $x = a$ ta có :

$$(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + 2a + 1.$$

Ta nói hai biểu thức trên bằng nhau và viết :

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 .$$

2) Tổng quát :

> *Hai biểu thức nguyên gọi là bằng nhau nếu chúng nhận giá trị bằng nhau tại mọi giá trị của các biến.*

2. Biểu thức phân bằng nhau

1) Ví dụ 1 : Xét hai biểu thức $\frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1}$ và $\frac{(x + 2)^2}{x + 2}$. Biểu thức thứ nhất xác định với $x \neq -1$, biểu thức thứ hai xác định với $x \neq -2$. Nhưng tại những giá trị thích hợp chung ($x \neq -1$ và $x \neq -2$) của x hai biểu thức đều nhận giá trị bằng nhau. Ta nói hai biểu thức bằng nhau và viết :

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1} = \frac{(x + 2)^2}{x + 2} \quad ; \quad x \neq -1, -2 .$$

2) Ví dụ 2 : Xét hai biểu thức $\frac{3x(x - 5)}{x - 5}$ và $3x$.

Biểu thức thứ nhất xác định với mọi $x \neq 5$, biểu thức thứ hai xác định với mọi x. Tại các giá trị thích hợp chung của x ($x \neq 5$) hai biểu thức đều nhận giá trị bằng nhau. Ta nói hai biểu thức bằng nhau và viết :

$$\frac{3x(x - 5)}{x - 5} = 3x ; \qquad x \neq 5.$$

3) Tổng quát :

> *Hai biểu thức nguyên hoặc phân gọi là bằng nhau nếu chúng nhận giá trị bằng nhau tại mọi giá trị thích hợp chung của các biến.*

BÀI TẬP

1. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4x^2 + 4x + 1}{4}$;

b) $\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = \frac{x^2 - 6x + 9}{9}$.

2. Hãy giải thích nhờ tính chất nào của các phép toán trên các số hữu tỉ mà ta có đẳng thức sau :

a) $x + 15 = 15 + x$;

b) $5(x + y) = 5x + 5y$;

c) $7x\ (6y) = 42xy$.

3. Chứng minh đẳng thức :

a) $\frac{5x\,(x+2)}{x} = 5(x + 2) \qquad (x \neq 0)$;

b) $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y \qquad (x \neq -y)$.

4. Chỉ ra một giá trị thích hợp của chữ mà tại đó các biểu thức sau nhận giá trị khác nhau.

a) $(x + 2)^2$ và $x^2 + 4$;

b) $x - 3y$ và $3(x - y)$.

5. Các biểu thức sau có bằng nhau không ?

a) $x - y$ và $y - x$

b) $(x - y)^2$ và $(y - x)^2$.

§4. ĐƠN THỨC

1. Đơn thức

Ví dụ : Ta hãy phân biệt hai loại biểu thức đại số sau :

1) $12x^2y$, $\frac{3}{4}(-x)2(xy^3)$, $(a + 3b)x^2$ (a, b là những hằng)

2) $2 - x$, $3x + 2y$, $\frac{5}{2x}$.

Ta thấy trong các biểu thức đại số loại thứ nhất các phép toán trên các biến chỉ là phép nhân hoặc luỹ thừa, còn trong các biểu thức đại số loại thứ hai có các phép cộng, trừ, chia đối với các biến.

Các biểu thức loại 1 gọi là các *đơn thức.*

Tổng quát :

> *Một biểu thức đại số trong đó các phép toán thực hiện trên các biến chỉ là những phép nhân hoặc lũy thừa gọi là một đơn thức.*

Chú ý : Một số cũng là một đơn thức, ví dụ -5 được coi là $-5x^0$.

2. Thu gọn đơn thức

Ví dụ : Xét đơn thức $-\frac{7}{8}y(2xy)\left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right)$. Ta có thể thu gọn đơn thức này theo các bước như sau :

1) Xác định dấu duy nhất thay thế các dấu có trong đơn thức :

$$-\frac{7}{8}y(2xy)\left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right) = (-1)\frac{7}{8}y(2xy)(-1)\left(\frac{1}{7}x^2y^3\right)$$

$$= (-1)\cdot(-1)\frac{7}{8}y(2xy)\left(\frac{1}{7}x^2y^3\right) = \frac{7}{8}y(2xy)\left(\frac{1}{7}x^2y^3\right).$$

Tổng quát :

Dấu duy nhất là "+" nếu đơn thức không chứa dấu "−" nào hay chứa một số chẵn lần dấu "−" ; dấu duy nhất là "−" trong trường hợp ngược lại.

2) Nhóm các thừa số là số cụ thể hay là các hằng và nhân chúng với nhau.

Trong đơn thức trên : $\frac{7}{8}\cdot 2\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{4}$.

3) Nhóm các biến, xếp chúng theo thứ tự các chữ cái ; và dùng kí hiệu lũy thừa để viết tích các chữ cái giống nhau.

Trong đơn thức trên : $y(xy)(x^2y^3) = x^3y^5$.

Vậy ta được :

$$-\frac{7}{8}y(2xy)\left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right) = \frac{1}{8}x^3y^5 .$$

$\frac{1}{8}x^3y^5$ gọi là *dạng thu gọn* của đơn thức đã cho.

$\frac{1}{8}$ gọi là *hệ số của đơn thức.*

x^3y^5 gọi là *phần biến* của đơn thức.

BÀI TẬP

1. Chỉ ra các đơn thức trong các biểu thức đại số sau :

a) $-x\frac{4}{9}y^3 21x^2$; $\frac{1}{4} + xy^3$; $(-y^2)(-5x)$;

b) $x(y + 1)z^2$; $\frac{xy^2}{2x + \frac{5}{7}}$; $\frac{xz}{y^2}$.

2. Thu gọn các đơn thức sau :

a) $x^2\left(-\frac{1}{3}y\right)\frac{1}{5}x^4$;

b) $-y2x^3y\frac{4x}{5}ab^5$;

c) $(-u^2)\frac{3}{4}v^3\left(-\frac{2}{5}\right)uv$;

d) $8(-u)^3 5(-uv)(-3v)^3$;

e) $-10y^2(2yz)^3(-5z)^2$.

3. Thu gọn các đơn thức trong biểu thức đại số sau :

$$-\frac{5}{2}(xy)^2x^3 + \frac{3}{7}(2x)^3\left(\frac{7}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x\right).3y .$$

4. Thu gọn các đơn thức trong biểu thức đại số sau :

$$\frac{-2x(xy)^3\frac{1}{4}(-y)^5}{\left(-\frac{2}{5}y\right)^3(x^2y)^5(5x)^2} .$$

5. Cho biết hệ số và phần biến của các đơn thức sau (sau khi đã thu gọn) :

a) $-x^4(yx)^2(-x)^2(-y)^3$;

b) $\frac{1}{2}ax^3(-xy)(-y^2)$ ở đây a là hằng ;

c) $-\frac{3}{2}y\left(\frac{4}{3}x^2y\right)^4$.

§5. BẬC CỦA ĐƠN THỨC

1. Bậc của một đơn thức

Ví dụ : Xét đơn thức $-\frac{7}{8}y(2xy)\left(-\frac{1}{7}x^2y^3\right)$. Sau khi thu gọn ta được đơn thức $\frac{1}{4}x^3y^5$. Ta thấy biến x có số mũ là 3, biến y có số mũ 5, tổng các số mũ của x, y là 8. Ta nói : bậc của đơn thức đối với biến x bằng 3, bậc của đơn thức đối với biến y bằng 5 và bậc của đơn thức đối với tập hợp các biến (hay đơn giản là bậc của đơn thức) bằng 8.

Tổng quát :

Bậc của đơn thức đối với một biến là số mũ của biến đó trong dạng thu gọn của đơn thức.

Bậc của đơn thức đối với tập hợp các biến, hay đơn giản là bậc của đơn thức, là tổng các bậc của đơn thức đối với mỗi biến.

Chú ý :

1) Nếu một biến nào đó không có mặt trong đơn thức ta nói bậc của đơn thức đối với biến đó là 0.

Ví dụ : Bậc của đơn thức $\frac{1}{4}x^3y^5$ đối với biến z là 0.

2) Một số khác 0 được coi là đơn thức bậc 0 đối với bất kì biến nào.

Ví dụ : $-\frac{1}{2}$ là đơn thức bậc 0 đối với x, (hoặc đối với y, z, ...).

3) Số 0 coi như một đơn thức không có bậc.

2. Tích các đơn thức

Ví dụ : Để nhân hai đơn thức $-\frac{3}{7}x^3y$ và $\frac{1}{6}x^4z^2$ ta viết chúng cạnh nhau rồi thu gọn đơn thức mới nhận được :

$$\left(-\frac{3}{7}x^3y\right) \cdot \left(\frac{1}{6}x^4z^2\right) = -\frac{3}{7}x^3y\frac{1}{6}x^4z^2 = -\frac{1}{14}x^7yz^2 .$$

Nhận xét : Bậc của tích đối với một biến bằng tổng các bậc của các đơn thức đối với biến đó.

Chẳng hạn, đối với biến x đơn thức thứ nhất có bậc 3, đơn thức thứ hai có bậc 4, đơn thức tích có bậc 7.

Trường hợp đặc biệt : Nâng lũy thừa

Ví dụ : $\left(-\frac{3}{2}a^4b\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}a^4b\right)\left(-\frac{3}{2}a^4b\right)\left(-\frac{3}{2}a^4b\right) =$

$$= -\frac{27}{8}a^{12}b^3 .$$

Nhận xét : Hệ số được nâng lên lũy thừa 3, còn các số mũ của mỗi biến được nhân lên với 3.

BÀI TẬP

1. Cho biết bậc của các đơn thức sau đối với từng biến x, y, z và đối với tập hợp các biến x, y, z :

$$\frac{2}{9}xyz,\ -x^3z,\ 4y^2z^3,\ 3axy^2z^3,\ xy^7,\ -\frac{1}{5}y^2z^3.$$

2. Tìm bậc của đơn thức và bậc của đơn thức đối với từng biến sau khi thu gọn đơn thức :

a) $\left(-\frac{1}{2}xyz\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)\left(-\frac{1}{3}y^2z\right)$;

b) $(5x^2)(-3y^5)(7zx)$.

3. Tính tích các đơn thức sau :

a) $\frac{3}{8}xy^2z^3$ và $-\frac{4}{15}yz$;

b) $-\frac{2}{7}x^2y$ và $-\frac{3}{5}uv^2$;

c) $3xyz$ và $7x^2y$ và $-5y^2z^3$.

4. Tính lũy thừa :

a) $\left(-\frac{2}{3}x^2yz^3\right)^3$;

b) $\left(-\frac{1}{2}u^5v^7\right)^2$.

5. Tính các tích sau :

a) $(-9x^2u) \cdot \left(\frac{1}{2}y^2z\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}uyz\right)$;

b) $(2uv^2)^3.(-3yu^2)^2.\left(\frac{1}{6}xyuv\right)$.

§6. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

1. Đơn thức đồng dạng

Ví dụ : Xét các đơn thức thu gọn : $2x^3y^2$, $-x^3y^2$, $\frac{5}{7}x^3y^2$. Ta thấy các đơn thức này chỉ khác nhau phần hệ số. Chúng được gọi là các *đơn thức đồng dạng.*

Tổng quát :

> *Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức, sau khi thu gọn, có phần biến giống nhau.*

2. Tổng các đơn thức đồng dạng

Ví dụ :

$$2x^4y^3 + \frac{1}{3}x^4y^3 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)x^4y^3 = \frac{7}{3}x^4y^3$$

$$axy^2z + bxy^2z = (a + b)xy^2z \text{ (a, b là hằng)}$$

Vậy :

Để cộng hai đơn thức đồng dạng ta giữ nguyên phần biến và cộng các hệ số với nhau.

3. Hiệu các đơn thức đồng dạng

Ví dụ :

$$3xy^2z^3 - 5xy^2z^3 = (3 - 5)xy^2z^3 = -2xy^2z^3.$$

$$\frac{1}{2}u^2v - \left(-\frac{3}{4}\right)u^2v = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)u^2v = \frac{5}{4}u^2v$$

$$axy - bxy = (a - b)xy \text{ (a, b là hằng)}$$

Vậy :

Để trừ hai đơn thức đồng dạng ta giữ nguyên phần biến và trừ hai hệ số cho nhau.

BÀI TẬP

1. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng : $\frac{2}{7}xy$, $-\frac{1}{5}x^2z$, $\frac{4}{7}xyz$, $\frac{7}{2}xy$, x^2z, $7xyz$, $\frac{5}{8}x^2z$, $2xy$.

2. Có thể nhận xét gì về bậc của các đơn thức đồng dạng ?

3. Tính tổng :

a) $2xy^3 + 5xy^3 + xy^3$;

b) $2xy^2z + 7xy^2z + (-5)xy^2z$;

c) $7y^2z^3 + (-7y^2z^3)$.

4. Tính hiệu :

a) $8uv - \frac{1}{3}uv$;

b) $-6x^2y^5 - 6x^2y^5$;

c) $2x^2y^2 - \left(-\frac{3}{4}x^2y^2\right)$;

d) $-\frac{1}{5}yz^4 - \left(-\frac{4}{15}yz^4\right)$.

5. Tính :

a) $-\frac{7}{8}x^2y - 5x^2y + 10x^2y + \frac{7}{7}x^2y$;

b) $uv^2 - \left(+4uv^2 - \frac{105}{2}uv^2 + uv^2\right) + \left(-\frac{105}{2}uv^2 + 4uv^2\right)$.

LUYỆN TẬP

1. Tìm các đơn thức đồng dạng với nhau trong các đơn thức sau :

$$\frac{1}{7}x^5 ; -3x^3 ; 4x^2 ; 5 ; ax^5 ; \frac{1}{9}x^3 ; bx^2 ; \frac{8}{3}.$$

Ở đây a, b, là những hằng.

2. Viết các đơn thức sau dưới dạng thu gọn và chỉ rõ đâu là hệ số đâu là phần biến của chúng :

a) $\frac{1}{2}x^3y^2(-ax)^3\left(\frac{2}{3}y\right)^2$, a là hằng ;

b) $-x\frac{1}{2}y\frac{4}{3}xy^2$.

3. Viết các đơn thức sau dưới dạng thu gọn và cho biết bậc của từng đơn thức đối với mỗi biến và đối với tập hợp các biến

a) $-15x^5yz^3\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3z^4$;

b) $ay^2(-7xz)^2byz^3$, a, b là những hằng.

4. Tính tổng :

a) $\frac{1}{2}y^2z^5 - \frac{3}{4}y^2z^5 + \frac{4}{3}y^2z^5$;

b) $axy^3 - bxy^3 + \frac{7}{3}xy^3$ a, b là những hằng.

5. Tính tích :

a) $\left(\frac{12}{31}xy^2\right)(-ay)^3$, a là hằng ;

b) $\left(-\frac{1}{7}x^2yz\right)(-by)\left(-\frac{2}{5}xz^3\right)$, b là hằng.

§7. ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

1. Định nghĩa

Một đa thức của các biến x, y, ..., z là một biểu thức nguyên trong đó các chữ x, y, ...z là các biến.

2. Ví dụ :

1) $2x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{7}$ là một đa thức của biến x.

2) $-3x^2 + xy + y^2 - \frac{5}{7}x - \frac{2}{11}y + 4$ là một đa thức của các biến x, y.

3) $x^2z + 2xyz + yz^2 - 3x^2z + 5yz^2 - xyz + 1$ là một đa thức của các biến x, y, z.

3. Thu gọn các số hạng đồng dạng

Trong các ví dụ a) và b) các đa thức đang xét không chứa số hạng đồng dạng nào. Còn trong ví dụ c) có các số hạng đồng dạng là x^2z và $-3x^2z$, $2xyz$ và $-xyz$, yz^2 và $5yz^2$. Thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng đó ta được đa thức :

$$-2x^2z + xyz + 6yz^2 + 1.$$

Ta nói đã *thu gọn các số hạng đồng dạng* của đa thức hay *viết đa thức dưới dạng thu gọn.*

4. Bậc của đa thức

Để xác định bậc của một đa thức trước hết ta viết đa thức đó dưới dạng thu gọn. Khi đó :

Bậc của đa thức đối với một biến là bậc của số hạng có bậc cao nhất đối với biến đó.

Bậc của đa thức đối với tập hợp các biến là bậc của số hạng có bậc cao nhất đối với tập hợp các biến.

Ví dụ : Đa thức $2x^2y^3 - xy^4 + y^6 - 3$ có :

bậc 2 đối với biến x

bậc 6 đối với biến y

bậc 6 đối với tập hợp các biến.

BÀI TẬP

1. Hãy chỉ ra các đa thức trong các biểu thức sau :

$x - 1 + \frac{2}{x}$; $y^3 - 4$; $xyz - ax^2$; $a(2 + 3bx)$.

$\frac{1}{4}xy(1 + z)$; $\frac{z^2 - 2az + 1}{a^2 + 1}$ (ở đây a là hằng)

$\frac{z}{x^2 + 1} + yz$.

2. Thu gọn các đa thức sau :

a) $-\frac{1}{2}xy^2z + 3x^3y^2 + 2xy^2z - \frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}x^3y^2 + xy^2z$;

b) $-xz^2 + \frac{1}{2}yz + \frac{2}{5}xz^3 - \frac{1}{2}yz + 2xz^2 + xz^3$;

c) $3xyz^2 - \frac{2}{3}xy^2z + \frac{1}{5}xy^2z + \frac{1}{2}xyz^2 - xy^2z$.

3. Xác định bậc của đa thức sau đối với mỗi biến và đối với tập hợp các biến.

a) $x^3y - 2x^2y^4z - xz^8 + 3y^5 - 1$;

b) $x^2y + y^2z + z^2x$.

4. Thu gọn các đa thức sau và tìm bậc của chúng :

a) $3x^5y^3 - 4x^4y^3 + 2x^4y^3 + 7xy^2 - 3x^5y^3$.

b) $2x^2y^3z^2 + 3x^4 - 7y^5 + 6yz^3 - x^2y^3z^2$.

5. Cho một ví dụ về một đa thức của biến x và y, có bậc 2 đối với x, bậc 3 đối với y và bậc 4 đối với tập hợp các biến x, y.

§8. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC

1. Cộng các đa thức

Ví dụ : Cộng hai đa thức $3x^2y - 4y^3z + 2$ và $xyz + y^3z - 5x - 7$. Ta viết :

$$(3x^2y - 4y^3z + 2) + (xyz + y^3z - 5x - 7) = 3x^2y - 4y^3z + 2 + xyz + y^3z - 5x - 7 = 3x^2y - 3y^3z + xyz - 5x - 5.$$

Tổng quát:

Để cộng hai đa thức ta viết các số hạng cùng với dấu của chúng kế nhau rồi thu gọn các số hạng đồng dạng (nếu có)

2. Trừ các đa thức

Ví dụ : Tìm hiệu của $4x^2 - yz + 3$ và $4x^2 + 5y^2 - 3yz + x - 2$. Ta viết :

$$(4x^2 - yz + 3) - (4x^2 + 5y^2 - 3yz + x - 2)$$

Áp dụng quy tắc "dấu ngoặc" ta được

$$4x^2 - yz + 3 - 4x^2 - 5y^2 + 3yz - x + 2 = -5y^2 + 2yz - x + 5$$

Tổng quát:

Để tìm hiệu hai đa thức ta viết các số hạng của đa thức thứ nhất cùng với dấu của chúng rồi viết các số hạng của đa thức thứ hai với dấu ngược lại dấu của chúng sau đó thu gọn các số hạng đồng dạng (nếu có).

BÀI TẬP

1. Tính tổng :

a) $(-5x^2y + 3xy^2 + 7) + (-6x^2y + 4xy^2 - 5)$.

b) $(2,4a^3 - 10a^2b) + (7a^2b - 2,4a^3 + 3ab^2)$.

c) $(15x^2y - 7xy^2 - 6y^3) + (2x^3 - 12x^2y + 7xy^2)$.

2. Tính hiệu :

a) $(1,2x - 3,5y + 2) - (0,2x - 2,5y + 3)$.

b) $(5,7x^2y - 3,1xy + 8y^3) - (6,9xy - 2,3x^2y + 8y^3)$

3. Tính :

a) $(x - y) + (y - z) - (x - z)$.

b) $(x^2 + y^2 - z^2) + (y^2 + z^2 - x^2) - (y^2 - x^2 - z^2)$.

4. Tìm đa thức M biết :

a) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

b) $M - (4xy - 3y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.

5. Tìm đa thức M biết :

a) $(25u^2v - 13uv^2 + u^3) - M = 11u^2v - 2u^3$.

b) $(7xyz + 15x^2yz^2 - 2xy^3) + M = 0$.

§9. ĐA THỨC MỘT BIẾN

1. Kí hiệu

Trong mục này ta chỉ xét các đa thức của một biến.

Ví dụ : $-x^3 + 4 - 7x + x^2$;

$4 + 5y$;

$ax^2 + bx + c$ – ở đây a, b, c là những hằng.

Chú ý : Mỗi số cũng coi là một đa thức một biến.

Ví dụ : 3, −1, 0 là những đa thức một biến (mặc dù chẳng chứa biến nào cả).

Kí hiệu : Một đa thức của một biến x (hoặc y, z, ...) kí hiệu là f(x), g(x), h(x)... (hoặc f(y), f(z), g(y), g(z), ...)

Ví dụ : $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 10$.

2. Sắp xếp một đa thức

Cho một đa thức một biến, sau khi thu gọn các số hạng đồng dạng người ta có thể sắp xếp các số hạng của nó theo lũy thừa tang hay giảm của biến.

Ví dụ : Đa thức $6x + 3 - 6x^2 + x^3 + 2x^4$

sắp xếp theo lũy thừa giảm của biến sẽ là :

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + 6x + 3$$

sắp xếp theo lũy thừa tăng của biến sẽ là :

$$3 + 6x - 6x^2 + x^3 + 2x^4.$$

3. Bậc

Bậc của đa thức f(x) là bậc của số hạng có bậc cao nhất đối với biến x.

Ví dụ :

Đa thức : $-x^5 + 2x^3 - 3$	có bậc 5
Đa thức : $6x + 1$	có bậc 1
Đa thức : 4	có bậc 0
Đa thức : 0	không có bậc.

4. Hệ số

Xét đa thức $f(x) = -x^5 + 2x^3 - 3$.

Đó là một đa thức *đa thu gọn*, các đơn thức có mặt ở đây *không đồng dạng* và có các hệ số là −1, 2, −3. Ta nói −1 là hệ số của lũy thừa 5 ; 2 là hệ số của lũy thừa 3 ; −3 là hệ số của lũy thừa 0 hay còn gọi là hệ số tự do. Bậc của đa thức f(x) là 5 vì thế hệ số của lũy thừa 5 còn gọi là hệ số cao nhất.

Chú ý. Đa thức f(x) trên còn có thể viết là :

$$f(x) = -x^5 + 0.x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - 3.$$

Vì thế ta nói hệ số của các lũy thừa 4, 2, 1 của đa thức f(x) bằng 0.

LUYỆN TẬP

1. Thu gọn và sắp xếp các số hạng của đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến :

a) $2 + 5x^7 - 6x^2 - 8 - 11x^7 + x^5 + 7x^2$;

b) $8x^5 + 7x - 6x^2 - 3x^5 + 2x^2 + 15$.

2. Thu gọn và sắp xếp các số hạng của đa thức sau theo lũy thừa tăng của biến :

a) $6y^3 - 8y^2 + 12 + 2y + 7y^2 - 3y^3$;

b) $-x - 3 + 2x^2 + 6x$.

3. Tìm bậc của đa thức sau :

a) $8 - 5x^2 + 3x^7 - 6x^3 + 2x - 3x^7$;

b) $-x + 12$;

c) $x^2 - 5x^6$;

d) -1.

4. Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức sau :

a) $2x^3 - 3x^2 + 5 - 7x^3$.

b) $0,5 + 15x + 8x^4 - 3x^2 - 8x^4$.

5. Tìm bậc và các hệ số của đa thức sau (liệt kê đầy đủ các hệ số từ lũy thừa 0 đến lũy thừa cao nhất)

a) $3,2 + \frac{1}{2}x^2 - 3x^5 + 12x^7$.

b) $3x - 7x^3 + 9x^5 + 2x^6$.

§10. CỘNG VÀ TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

Để cộng hoặc trừ các đa thức một biến ta sắp xếp chúng cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt phép tính như trường hợp cộng hoặc trừ các số.

Ví dụ : Cho $f(x) = 2x^4 - x^3 + x - 3$

$g(x) = -x^3 + 5x^2 + 4x + 2$

$h(x) = x^2 + x + 1.$

Cả ba đa thức đã viết theo lũy thừa giảm của biến. Để cộng cả ba đa thức ta đặt như sau :

$$\begin{array}{rl} & f(x) = 2x^4 - x^3 + \quad + x - 3 \\ + & g(x) = \quad - x^3 + 5x^2 + 4x + 2 \\ & h(x) = \quad\quad\quad x^2 + x + 1 \\ \hline f(x) + g(x) + h(x) = & 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 6x + 0. \end{array}$$

Để thực hiện phép trừ ta đặt :

$$\begin{array}{rl} & f(x) = 2x^4 - x^3 \quad\quad + x - 3 \\ - & g(x) = \quad + x^3 - 5x^2 - 4x - 2 \\ \hline f(x) - g(x) = & 2x^4 \quad\quad - 5x^2 - 3x - 5 \end{array}$$

BÀI TẬP

1. Tính $f(x) + g(x)$ sau khi xắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến :

$f(x) = -7x^3 + 6x - \frac{1}{3} + 8x^4 + 7x^2 - \frac{1}{5}x$.

$g(x) = 28 - 5x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 3x^4 - \frac{2}{3}$.

2. Tính $f(x) + g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa tăng của biến :

$f(x) = 1 + x^5 - 3x^2 + \frac{1}{3}x^4$.

$g(x) = 3x^7 - 7x^6 + \frac{2}{3}x^4 - x^5 + 8 - 2x.$

3. Tính $f(x) + g(x) + h(x)$ với :

$f(x) = 6x^7 - 5x^3 + 1$

$g(x) = -3 + 2x - 4x^7.$

$h(x) = -2x^7 - x^5 + 7x^2 + x^6.$

4. Tính $f(x) - g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa giảm của biến :

$f(x) = 4 - x^3 + \frac{1}{5}x^2.$

$g(x) = -\frac{4}{5}x^2 - x^3 + 4 + x.$

5. Tính $f(x) - g(x)$ sau khi sắp xếp chúng theo lũy thừa tăng của biến :

$f(x) = 2x^5 - 3x + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1.$

$g(x) = x^6 + 6x^2 - 7x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 2.$

§11. NGHIỆM CỦA MỘT ĐA THỨC

1. Ví dụ

Xét đa thức $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x.$

Ta thấy tại $x = -2$ đa thức nhận giá trị là :

$$f(-2) = (-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - (-2) = -8 + 6 + 2 = 0.$$

Ta nói : $f(x)$ *triệt tiêu tại* $x = -2$ hay -2 *là một nghiệm của đa thức* $f(x)$.

Dễ thấy là f(0) = 0 vậy 0 cũng là một nghiệm của f(x)

2. Định nghĩa :

Nếu tại x = a đa thức f(x) có giá trị bằng o thì ta nói a là một nghiệm của f(x)

3. Chú ý

Một đa thức có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm nào.

Ví dụ :

1) Đa thức $x^2 + 1$ không có nghiệm nào và tại x = a bất kì giá trị của đa thức là $a^2 + 1$ luôn luôn lớn hơn 0.

2) Đa thức $3x - 2$ có một nghiệm là $x = \frac{2}{3}$.

3) Đa thức $x^2 + 2x$ có hai nghiệm là x = 0 và x = −2.

Người ta chứng minh được rằng số nghiệm của một đa thức khác 0 không vượt quá bậc của nó

BÀI TẬP

1. Tính giá trị của đa thức sau :

a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ tại x = 0; 1, 2

b) $g(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ tại x = −1; 0, 1.

2. Kiểm tra rằng :

a) Đa thức $5x + \frac{1}{2}$ có một nghiệm là $x = -\frac{1}{10}$;

b) Đa thức $3x^2 + x - \frac{2}{3}$ có hai nghiệm là $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{2}{3}$.

3. Tìm nghiệm của đa thức sau :

a) $-2x + 4$; b) $5x + 12$; c) $-10x - 2$.

4. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

5. Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $a + b + c = 0$. Chứng tỏ rằng đa thức có một nghiệm bằng 1.

Mở rộng kết quả trên cho một đa thức bậc n bất kì.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính giá trị của các biểu thức sau đây tại $a = 1$, $b = -1$, $x = 3$.

a) $(3ax + 2x + 1)\ 4a^2b$;

b) $(2x^2 - 3a - 1) \cdot \frac{3}{ax^2}$;

c) $3a^3bx\left(\frac{2}{3}ax - 1 + ab^2\right)$.

2. Thu gọn các đơn thức sau, rồi tìm bậc (đối với mỗi biến và đối với tập hợp biến) và hệ số của nó :

a) $2x^2y^3yz$;

b) $16x^2 \cdot 2y^2xz$;

c) $-3ax\ 3by$ ở đây a, b là những hằng ;

d) $(-2)x^2y\ (-9)x^3y^5$.

3. Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng : $-3x^2yz$; $18xy^2yz$; $62x^2yz$; $-25xyz^2$; $30xy^3z$; $\frac{1}{2}xyz^2$.

4. Viết các đơn thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu hai đơn thức, trong đó có một số hạng bằng $2xy$:

a) $4xy$; b) $6xy$; c) xy ;
d) $-3xy$; e) $-xy$.

5. Viết các đơn thức sau dưới dạng tích hai đơn thức trong đó có một thừa số bằng $3x^2y^2$.

a) $15x^4y^3$; b) $6x^2y^6$; c) $2x^5y^4$

d) x^2y^2 ; e) $\frac{1}{2}x^3y^2$.

6. Tính tổng hoặc hiệu các đa thức sau và tìm bậc của đa thức nhận được :

a) $(15x^2y - 7xy^2 - 6x^3) + (2y^3 - 12x^2y + 7xy^2)$;

b) $(2,3x^4 + 5,1x^2y^2 - y^4) - (7,2xy^3 - y^4 + 5,1x^2y^2 + 3,3x^4)$.

7. Tìm đa thức M sao cho :

a) $M + (12x^4 - 15x^2 + 6) = 0$;

b) Tổng của M và đa thức $x^3 - 2xy + y^2 - 3xz + z^2$ không chứa biến x.

c) Tổng của M và đa thức $2xy^2 - 4xz^5 + 3xyz - 7y^3z^2 + 15$ là một đa thức bậc 0.

8. Thu gọn các số hạng đồng dạng trong các đa thức sau :

a) $3x^2 - 10 + \frac{2}{5}x^3 + 7x - x^2 + 8 + 7x^3$.

b) $\frac{1}{7}x - 2x^4 + 5x + 6$.

9. a) Viết các đa thức sau theo lũy thừa tăng của biến và tìm bậc của chúng :

$f(x) = 5 - 8x^4 + 2x^3 + x + 5x^4 + x^2 + 3x^3$

$g(x) = x^5 + x^4 - 3x + 7 - 2x^4 - x^5$.

b) Viết đa thức sau theo lũy thừa giảm của biến và tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do của chúng :

$f(x) = 5x^2 + 9x^5 - 7x^4 - x^2 - 6x^5 + x^3 + 75 - x$.

$g(x) = 2x^3 + 5 - 7x^4 - 6x^3 + 3x^2 - x^5$.

10. Tính tổng $f(x) + g(x)$ và hiệu $f(x) - g(x)$ với

a) $f(x) = 10x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x + 1$.

$g(x) = -5x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10.$

b) $f(x) = 15x^3 + 7x^2 + 3x - \frac{1}{2}$.

$g(x) = -15x^3 - 7x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x ; y) sao cho x + y = 7. Số tự nhiên x phải thỏa mãn điều kiện nào để có số tự nhiên y sao cho x + y = 7 ?

2. Tìm các số nguyên y sao cho x + y = 7 lần lượt tương ứng với x = 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên x có một số nguyên y sao cho x + y = 7.

3. Tìm các số nguyên x biết :

a) $-x = 3$; $-x = 0$; $-x = -1$; $-x = -7$;

b) $-2 < x < 0$; $1 < -x < 5$;

c) $a < x < a + 3$; $a - 2 < x < a + 1$ với a là một số nguyên cho trước.

4. Tìm các số nguyên x biết ;

a) $|x| = 5$; $|x| = 0$; $-|x| = -1$; $|-x| = 7$;

b) $|x| < 4$.

5. Bỏ dấu ngoặc :

a) (a + b) (a + b + c) ;

b) (a + b - c) (a - b + c) .

Ở đây a, b, c là những số nguyên.

6. Tính giá trị biểu thức :

a) $\dfrac{3^2 - 0{,}5\,(7{,}5 - 5{,}3)}{-6{,}2 + 2\,(0{,}5 + 1{,}6)}$.

b) $\dfrac{2x^2y - 1{,}2\,(3y - 2x)}{xy}$ tại $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$.

7. a) Với điều kiện nào của số hữu tỉ x thì :

*) $|x - 3| = x - 3$;

*) $|x - 3| = 3 - x$.

b) Tính $|x - y|$ trong các trường hợp $x \geq y$ và $x < y$.

8. Tìm điều kiện của các số hữu tỉ d và e để từ tỉ lệ thức $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ suy ra tỉ lệ thức :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+e}.$$

9. Một vòi nước chảy trong 5 phút được $\dfrac{1}{3}$ thùng nước. Hỏi nếu vòi đó chảy trong 3 giờ 30 phút thì được bao nhiêu thùng nước.

10. Hai bác công nhân cùng làm chung được 119 sản phẩm (thời gian làm như nhau). Hỏi mỗi bác làm được bao nhiêu sản phẩm, biết rằng bác thứ nhất làm một sản phẩm mất 9 phút, còn bác thứ hai mất 8 phút.

11. Giả sử $X = \{1, 2, 3\}$ và $f : X \to X$ là một hàm số. Hãy điền vào bảng sau các giá trị có thể của f(x) (5 cách khác nhau)

x	1	2	3
f(x)			

12. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}$. Hỏi các điểm sau có nằm trên đồ thị của hàm số không.

a) $A\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$; b) $B\left(1; -\dfrac{1}{6}\right)$;

c) $C\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

13. Cho biết đường thẳng chứa đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A\left(-1;\frac{2}{5}\right)$. Hãy tìm a.

14. Cho biết điểm $M\left(3;-\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$. Hãy tìm a.

15. Hãy vẽ trên hệ tọa độ Oxy đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; $B\left(2;-\frac{2}{3}\right)$. Hàm số nào có đồ thị nằm trên đường thẳng này ?

16. Cho hàm số $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$

$$x \longmapsto f(x)$$

thỏa mãn các điều kiện :

a) $f(0) = 0$;

b) $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$ với x_1, x_2 khác 0 bất kì.

Chứng minh rằng $f(x) = ax$ với $a = f(1)$.

17. Cho hàm số $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Q}$

$$x \longmapsto f(x)$$

(ở đây $\mathbf{Q}^*$ là tập các số hữu tỉ khác 0) thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

với x_1, x_2 khác 0 bất kì. Chứng minh rằng $f(x) = \frac{a}{x}$ với $a = f(1)$.

18. Cho ví dụ về một đa thức của hai biến x, y thỏa mãn điều kiện :

a) Có bậc 2 đối với x, bậc nhất đối với y, bậc 3 đối với tập hợp các biến.

b) Có bậc 2 đối với x, bậc 2 đối với y, bậc 3 đối với tập hợp các biến.

19. Cho hai đa thức $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$. Và giả sử $f(x) = g(x)$ (nghĩa là $f(x)$ và $g(x)$ nhận giá trị bằng nhau tại mọi giá trị của biến x).

Chứng minh rằng $a = c$ và $b = d$.

20. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = ax + b$ có hai nghiệm khác nhau thì nó là đa thức 0 (nghĩa là $a = b = 0$).

MỤC LỤC

Trang

Chương I
SỐ NGUYÊN

§1. Tập hợp **Z** các số nguyên 3
§2. Thứ tự trong **Z** 6
§3. Phép cộng trong **Z** 9
§4. Tính chất của phép cộng 11
§5. Phép trừ trong **Z** 13
§6. Quy tắc "dấu ngoặc" 16
§7. Phép nhân trong **Z** 18
§8. Tính chất của phép nhân 20
§9. Bội và ước của một số nguyên 22
Bài tập ôn tập chương I 23

Chương II
SỐ HỮU TỈ

§1. Phân số 25
§2. Tập hợp **Q** các số hữu tỉ 28
§3. Thứ tự trong **Q** 30
§4. Phép cộng và phép trừ trong **Q** 33
§5. Giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ 37
§6. Phép nhân trong **Q** 39
§7. Phép chia trong **Q** 41
§8. Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và ứng dụng 43
§9. Lũy thừa của một số hữu tỉ 46
§10. Lũy thừa của một số hữu tỉ (tiếp theo) 48
§11. Lũy thừa của một số hữu tỉ (tiếp theo) 51
§12. Tỉ lệ thức 53
§13. Các tính chất của tỉ lệ thức 55

§14. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau 57
Bài tập ôn tập chương II 59

Chương III
HÀM SỐ

§1. Đại lượng tỉ lệ thuận 62
§2. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ thuận 64
§3. Đại lượng tỉ lệ nghịch 66
§4. Một số bài toán về đại lượng tỉ lệ nghịch 68
§5. Hàm số 72
§6. Mặt phẳng tọa độ 75
§7. Đồ thị của hàm số 77
§8. Đồ thị hàm số $y = ax$ 81
§9. Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ 83
Bài tập ôn tập chương III 86

Chương IV
BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. Biểu thức chứa chữ 89
§2. Giá trị của một biểu thức đại số 91
§3. Biểu thức đại số bằng nhau 93
§4. Đơn thức 95
§5. Bậc của đơn thức 98
§6. Đơn thức đồng dạng 100
§7. Đa thức nhiều biến 103
§8. Cộng và trừ đa thức 105
§9. Đa thức một biến 106
§10. Cộng và trừ đa thức một biến 109
§11. Nghiệm của một đa thức 110
Bài tập ôn tập chương IV 112
Bài tập ôn tập cuối năm 114

ĐẠI SỐ 7

In 210.000 bản, khổ 14,5×20,5
tại Xưởng Chế bản – In
Nhà Xuất bản Giáo dục
57 Giảng Võ – Hà Nội
Số in : 74 – Số XB : 135/482E
In xong và nộp lưu chiểu
tháng 5 năm 1994

Giá : **2.200đ**